издательство Мнемозина

ВЕБИНАРЫ

Геометрические задачи на развитие критического мышления учащихся

ВЕДУЩИЙ: **Смирнов Владимир Алексеевич**, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой элементарной математики и методики обучения математике МПГУ, автор учебников по геометрии для 7—9 и 10—11 классов

Авторский сайт: vasmirnov.ru

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии
для 5-11 классов

Авторы:
Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.
Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

Учебно-методический комплект по геометрии

Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов

Программа и тематическое планирование по геометрии для 10-11 классов

Программа по геометрии для 5-6 классов

Дидактические материалы

Уроки геометрии с "Power Point"
5-6 классы
7-9 классы
10-11 классы

Геометрия с "GeoGebra".

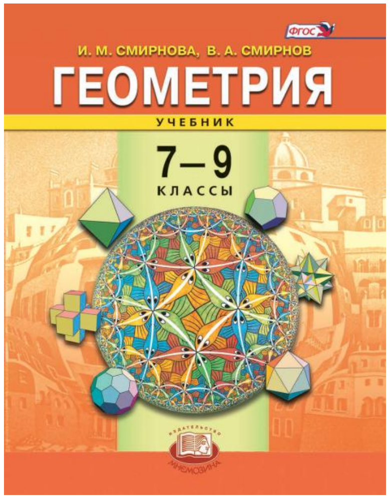
Элементарная математика для студентов педагогических вузов

Статьи о преподавании геометрии

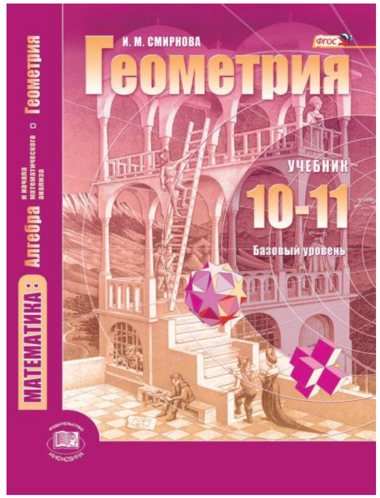
Видеолекции и вебинары Подготовка к ГИА Подготовка к ЕГЭ

Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru

С 2003 года учебники и пособия, входящие в УМК по геометрии, выпускаются в издательстве «Мнемозина», учебники имеют гриф «Рекомендовано» и входят в Федеральный перечень

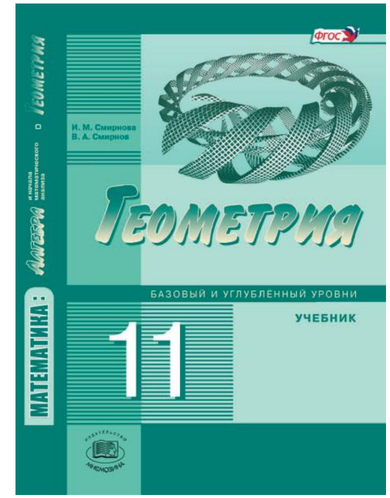


ФПУ № 1.2.4.3.8.1

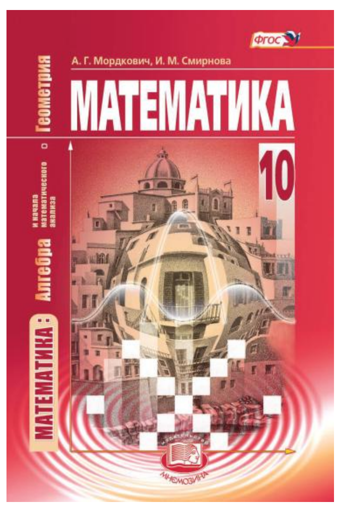


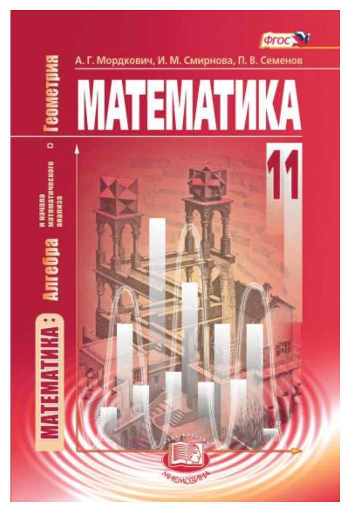
ФПУ № 1.3.4.1.14.1

ФПУ № 1.3.4.1.15.1

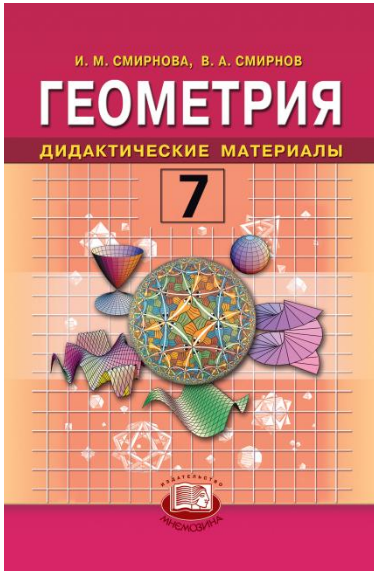


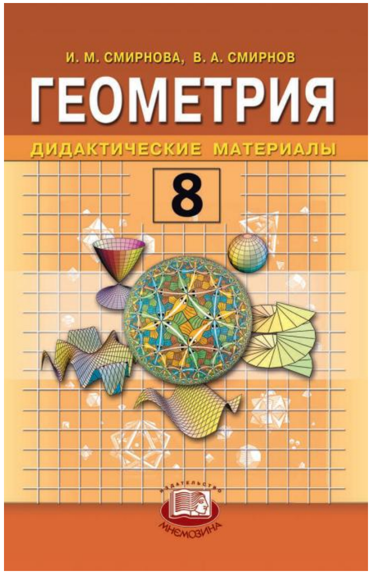
ФПУ № 1.3.4.1.15.2

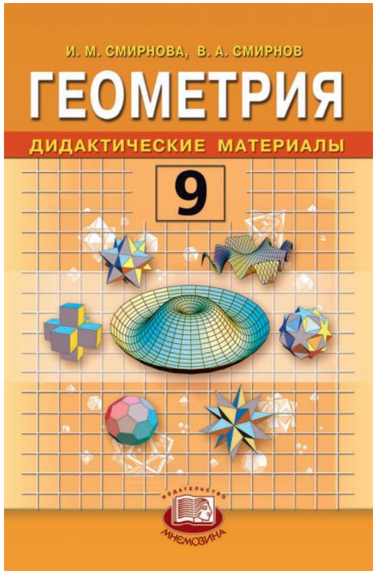


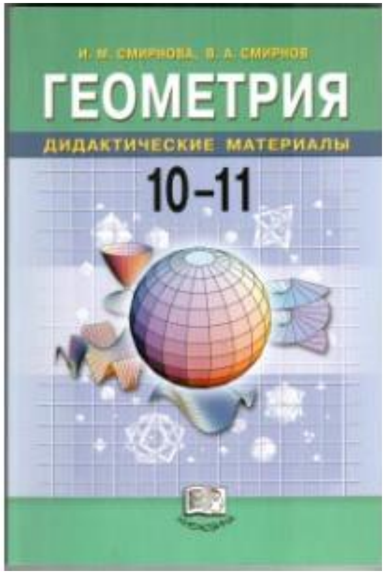


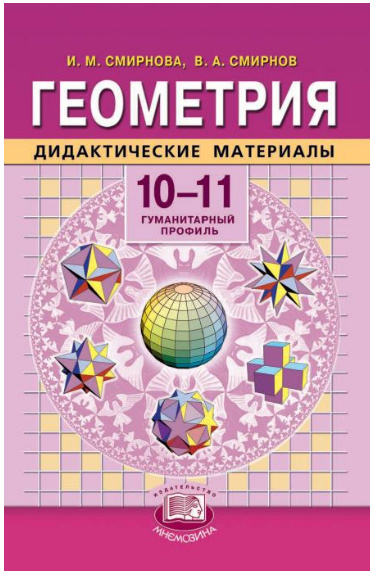
Дидактические материалы



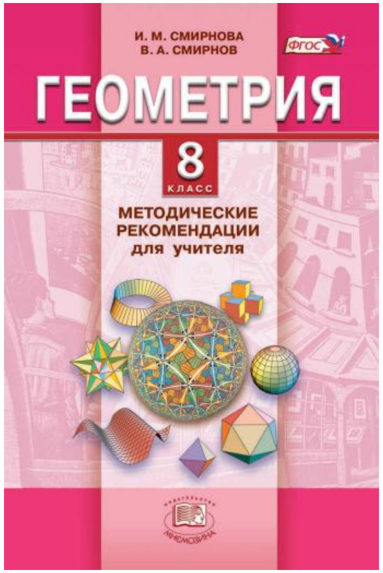


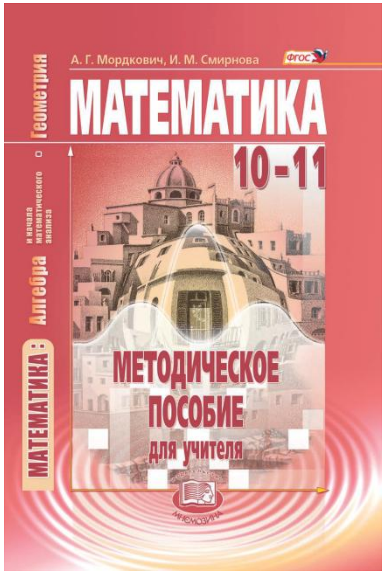






Методические рекомендации

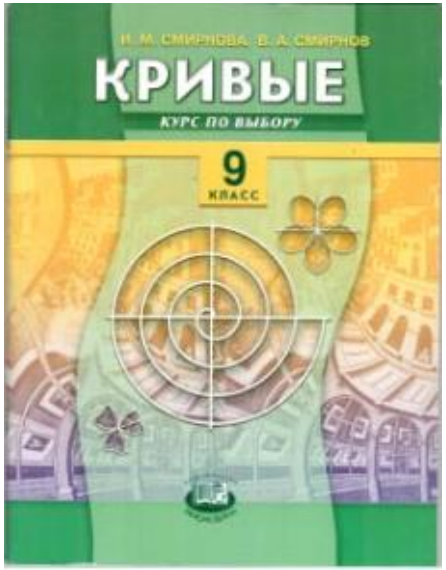


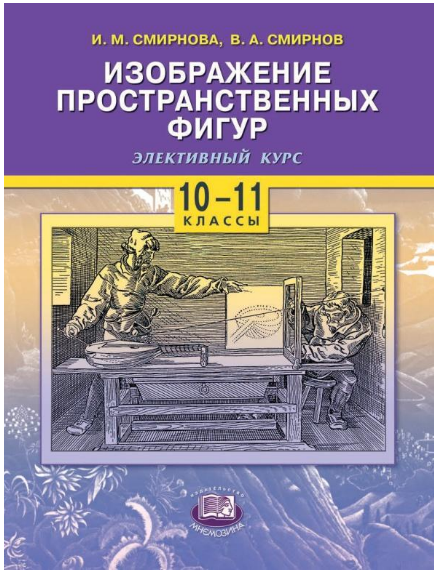


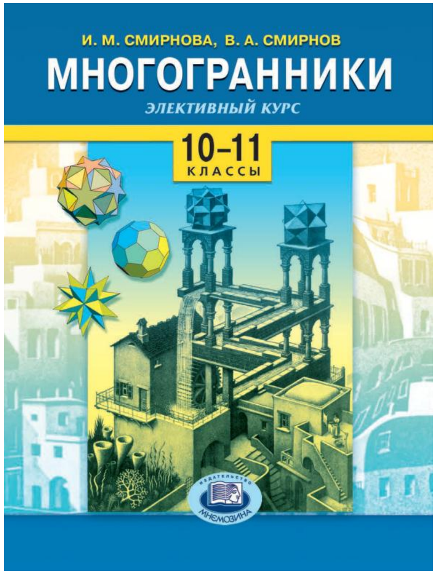
Рабочие тетради для 7–9 и 10–11 классов

Дополнительные сборники задач

Курсы по выбору и элективные курсы







Задачи на развитие критического мышления

Под критическим мышлением будем понимать способ мышления, при котором человек ставит под сомнение любую информацию, и даже собственные убеждения, использует методы познания, которые отличаются контролируемостью, обоснованностью и целенаправленностью.

Это согласуется с высказываниями великого французского философа и математика Рене Декарта, который считал, что только принцип *«Сомневайся во всём»* в состоянии помочь нам познать мир.

Сегодня критическое мышление необходимо каждому человеку в связи согромным потоком информации, распространяемым через средства массовой информации, интернет и т. п.

Задача развития критического мышления учащихся является одной из важных задач обучения, в частности математике. К сожалению, в школе этому вопросу уделяется крайне мало внимания.

В то же время, задачи, использующие критическое мышление, предлагаются на основном государственном экзамене (ОГЭ) и на едином государственном экзамене (ЕГЭ) по математике.

Отметим, что в середине прошлого века было издано несколько замечательных книг, посвящённых: ошибкам в математических рассуждениях.

1. Брадис В. М. и др. Ошибки в математических рассуждениях. – М.: Учпедгиз, 1959.

2. Литцман В. Где ошибка? – М.: Физматлит, 1962.

3. Мадера А. Г., Мадера Д. А. Математические софизмы. – М.: Просвещение, 2003.

4. Обреимов В.И. Математические софизмы. – С.-Петербург, 1889.

5. Уёмов А. И. Логические ошибки. – М.: Госполитиздат, 1958.

6. Халперн Д. Психология критического мышления. – М.– СПб.: Питер, 2000.

Для развития критического мышления учащихся необходимо не только включать в содержание обучения соответствующие задачи, но и критически относится к изучаемому теоретическому материалу.

Нужно, чтобы учащиеся не заучивали, а понимали доказательства свойств и теорем, могли отвечать на вопросы, связанные с доказательствами.

К сожалению, в некоторых действующих учебниках геометрии имеются «доказательства», которые или содержат пробелы, или слишком сложны для понимания учащихся, или выходят за рамки школьного курса геометрии. Об этом лучше прямо говорить учащимся и не требовать от них воспроизведения этих «доказательств».

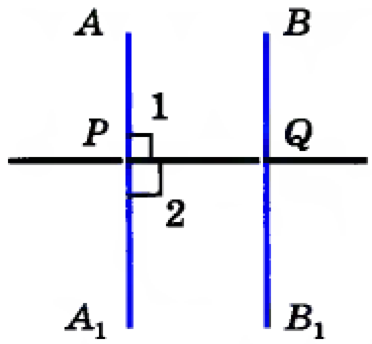
Пример 1

Отметим, что **две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются** (рис. 43, *а*).

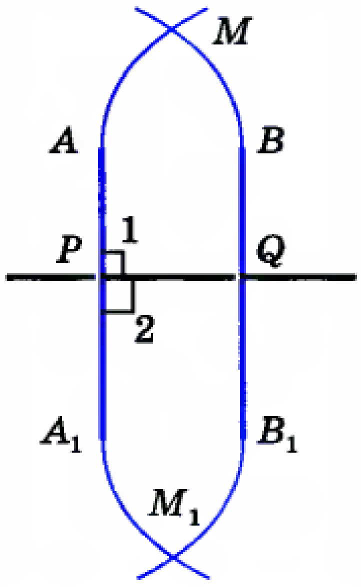
В самом деле, рассмотрим прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные к прямой PQ (рис. 43, *б*). Мысленно перегнем рисунок по прямой PQ так, чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. Так как прямые углы 1 и 2 равны, то луч PA наложится на луч PA_1. Аналогично, луч QB наложится на луч QB_1. Поэтому, если предположить, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, то эта точка наложится на некоторую точку M_1, также лежащую на этих прямых (рис. 43, *в*), и мы получим, что через точки M и M_1 проходят две прямые: AA_1 и BB_1. Но это невозможно. Следовательно, наше предположение неверно и, значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.

Для проведения перпендикулярных прямых используют чертежный угольник и линейку (рис. 44).

а)



б)



Пример 2

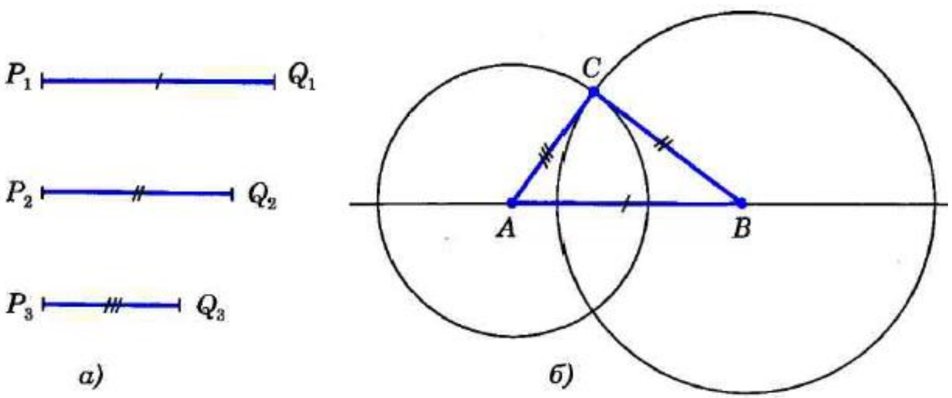
Задача 3

Построить треугольник по трем его сторонам.

Решение

Пусть даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 (рис. 141, *а*). Требуется построить треугольник ABC, в котором $AB=P_1Q_1$, $BC=P_2Q_2$, $CA=P_3Q_3$.

Проведем прямую и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 141, *б*). Затем построим две окружности: одну — с центром A и радиусом P_3Q_3, а другую — с центром B и радиусом P_2Q_2. Пусть точка C — одна из точек пересечения этих окружностей. Проведя отрезки AC и BC, получим искомый треугольник ABC.



В самом деле, по построению $AB=P_1Q_1$, $BC=P_2Q_2$, $CA=P_3Q_3$, т. е. стороны треугольника ABC равны данным отрезкам.

Задача 3 не всегда имеет решение. Действительно, во всяком треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей стороны, поэтому если какой-нибудь из данных отрезков больше или равен сумме двух других, то нельзя построить треугольник, стороны которого равнялись бы данным отрезкам.

Пример 3

40 Выпуклый многоугольник

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

На рисунке 154 многоугольник F_1 является выпуклым, а многоугольник F_2 — невыпуклым.

Рассмотрим выпуклый n-угольник, изображенный на рисунке 155, *а*. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ называются **углами** этого многоугольника. Найдем их сумму.

Для этого соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате получим $n—2$ треугольника (рис. 155, *б*), сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ равна $(n-2)\cdot 180°$.

Итак, сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n—2)\cdot 180°$.

Рис. 153

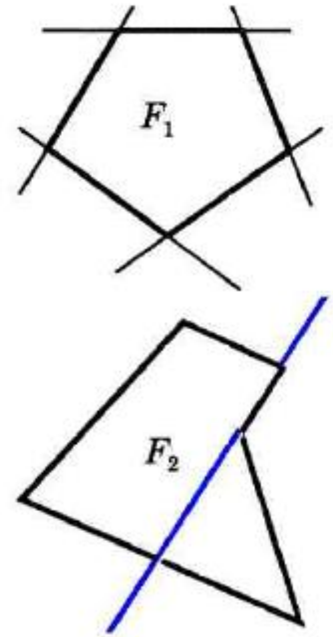
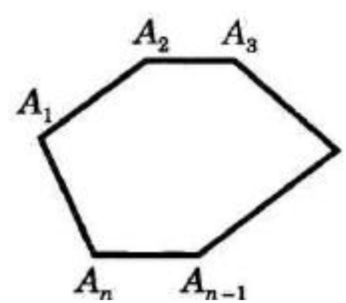


Рис. 154

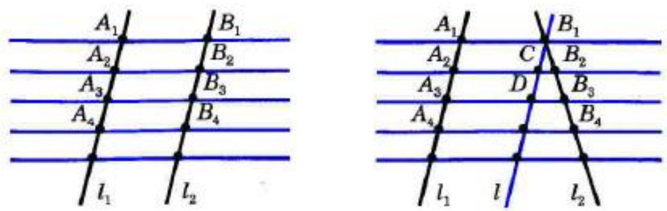


Пример 4

385 Докажите **теорему Фалеса**[1]: если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

Решение

Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 165). Требуется доказать,



а) *б)*

Рис. 165

что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу. Докажем, например, что $B_1B_2=B_2B_3$.

Рассмотрим сначала случай, когда прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 165, *а*). Тогда $A_1A_2=B_1B_2$ и $A_2A_3=B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2=A_2A_3$, то и $B_1B_2=B_2B_3$. Если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то через точку B_1 проведем прямую l, параллельную прямой l_1 (рис. 165, *б*). Она пересечет прямые A_2B_2 и A_3B_3 в некоторых точках C и D. Так как $A_1A_2=A_2A_3$, то по доказанному $B_1C=CD$. Отсюда получаем $B_1B_2=B_2B_3$ (задача 384). Аналогично можно доказать, что $B_2B_3=B_3B_4$ и т. д.

Пример 5

49* Площадь квадрата

Докажем, что площадь S квадрата со стороной a равна a^2.

Начнем с того случая, когда $a=\frac{1}{n}$, где n — целое число. Возьмем квадрат со стороной 1 и разобьем его на n^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, *а* (на этом рисунке $n = 5$). Так как площадь большого квадрата равна 1, то площадь каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n^2}$. Сторона каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n}$, т. е. равна a. Итак,

$$S=\frac{1}{n^2}=\left(\frac{1}{n}\right)^2=a^2. \qquad (1)$$

Пусть теперь число a представляет собой конечную десятичную дробь, содержащую n знаков после запятой (в частности, число a может быть целым, и тогда $n = 0$). Тогда число $m = a\cdot 10^n$ целое. Разобьем данный квадрат со стороной a на m^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, *б* (на этом рисунке $m = 7$).

При этом каждая сторона данного квадрата разобьется на m равных частей, и, значит, сторона любого маленького квадрата равна

$$\frac{a}{m}=\frac{a}{a\cdot 10^n}=\frac{1}{10^n}.$$

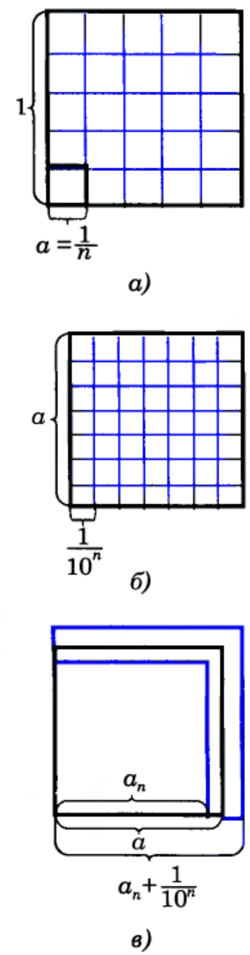


Рис. 180

По формуле (1) площадь маленького квадрата равна $\left(\frac{1}{10^n}\right)^2$. Следовательно, площадь S данного квадрата равна

$$m^2\cdot\left(\frac{1}{10^n}\right)^2=\left(\frac{m}{10^n}\right)^2=\left(\frac{a\cdot 10^n}{10^n}\right)^2=a^2.$$

Наконец, пусть число a представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим число a_n, получаемое из a отбрасыванием всех десятичных знаков после запятой, начиная с $(n+1)$-го. Так как число a отличается от a_n не более чем на $\frac{1}{10^n}$, то $a_n\leqslant a\leqslant a_n+\frac{1}{10^n}$, откуда

$$a_n^2\leqslant a^2\leqslant\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (2)$$

Ясно, что площадь S данного квадрата заключена между площадью квадрата со стороной a_n и площадью квадрата со стороной $a_n+\frac{1}{10^n}$ (рис. 180, *в*), т. е. между a_n^2 и $\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2$:

$$a_n^2\leqslant S\leqslant\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (3)$$

Будем неограниченно увеличивать число n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и, значит, число $\left(a_n+\frac{1}{10^n}\right)^2$ будет сколь угодно мало отличаться от числа a_n^2. Поэтому из неравенств (2) и (3) следует, что число S сколь угодно мало отличается от числа a^2. Следовательно, эти числа равны: $S = a^2$, что и требовалось доказать.

Пример 6

75 Объем прямоугольного параллелепипеда

Теорема

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

Доказательство

Обозначим измерения прямоугольного параллелепипеда P буквами a, b, c, а его объем буквой V, и докажем, что $V = abc$.

Могут представиться два случая.

1) Измерения a, b и c представляют собой конечные десятичные дроби, у которых число знаков после запятой не превосходит n (можно считать, что $n \geqslant 1$). В этом случае числа $a \cdot 10^n$, $b \cdot 10^n$ и $c \cdot 10^n$ являются целыми. Разобьем каждое ребро параллелепипеда на равные части длины $\frac{1}{10^n}$ и через точки разбиения проведем плоскости, перпендикулярные к этому ребру. Параллелепипед P разобьется на $abc \cdot 10^{3n}$ равных кубов с ребром $\frac{1}{10^n}$. Так как объем каждого такого куба равен $\frac{1}{10^{3n}}$ (см. п. 74), то объем всего параллелепипеда P равен $abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$. Итак, $V = abc$.

2) Хотя бы одно из измерений a, b и c представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим конечные десятичные дроби a_n, b_n, c_n, которые получаются из чисел a, b, c, если отбросить в каждом из них все цифры после запятой, начиная с $(n+1)$-й. Очевидно, $a_n \leqslant a \leqslant a'_n$, где $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$, и аналогичные неравенства справедливы для b и c. Перемножив эти неравенства, получим

$$a_nb_nc_n \leqslant abc \leqslant a'_nb'_nc'_n, \text{ где } b'_n = b_n + \frac{1}{10^n},\ c'_n = c_n + \frac{1}{10^n}. \quad (1)$$

По доказанному в первом случае левая часть (1) представляет собой объем V_n прямоугольного параллелепипеда P_n с измерениями a_n, b_n, c_n, а правая часть — объем V'_n прямоугольного параллелепипеда P'_n с измерениями a'_n, b'_n, c'_n. Так как параллелепипед P содержит в себе параллелепипед P_n, а сам содержится в параллелепипеде P'_n (рис. 176), то объем V параллелепипеда P заключен между $V_n = a_nb_nc_n$ и $V_n' = a'_nb'_nc'_n$, т. е.

$$a_nb_nc_n \leqslant V \leqslant a'_nb'_nc'_n. \quad (2)$$

Будем неограниченно увеличивать n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и поэтому число $a'_nb'_nc'_n$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $a_nb_nc_n$. Отсюда в силу неравенств (1) и (2) следует, что число V сколь угодно мало отличается от числа abc. Значит, они равны: $V = abc$, что и требовалось доказать. △

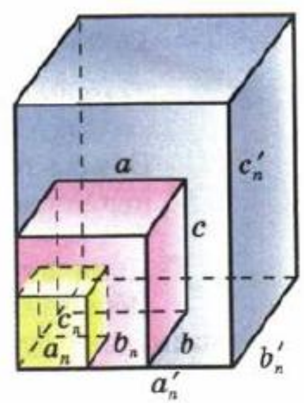


Рис. 176

Пример 7

Теорема

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство

Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n-угольную призму P_n (рис. 181). Площадь S_n основания этой призмы выражается формулой

$$S_n = nr \sin \frac{180^\circ}{n} r \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Наряду с призмой P_n рассмотрим призму Q_n, описанную около цилиндра P (рис. 182). Площадь ее основания равна

$$nr \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} r = \frac{S_n}{\cos^2 \frac{180^\circ}{n}}.$$

Поскольку призма P_n содержится в цилиндре P, а цилиндр P содержится в призме Q_n, то объем V цилиндра P удовлетворяет неравенствам

$$S_n \cdot h < V < \frac{S_n}{\cos^2 \frac{180^\circ}{n}} \cdot h. \qquad (2)$$

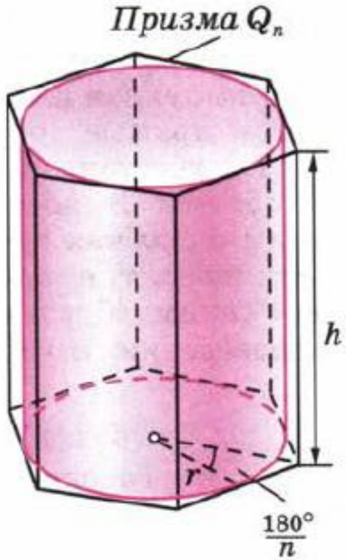


Рис. 182

Будем неограниченно увеличивать число n. Так как при $n \to \infty$ $\cos \frac{180^\circ}{n} \to 1$, а $S_n \to \pi r^2$, то правая и левая части неравенств (2) стремятся к величине $\pi r^2 h$. Следовательно,

$$V = \pi r^2 h. \qquad (3)$$

Обозначив площадь πr^2 основания цилиндра буквой S, из формулы (3) получим

$$V = S \cdot h.$$

Теорема доказана. △

Пример 8

79 Объем наклонной призмы

Теорема

Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.

▼ **Доказательство**

Докажем сначала теорему для треугольной призмы, а затем — для произвольной призмы.

1. Рассмотрим треугольную призму с объемом V, площадью основания S и высотой h. Отметим точку O на одном из оснований призмы и направим ось Ox перпендикулярно к основаниям (рис. 185, *а*). Рассмотрим сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим буквой x абсциссу точки пересечения этой плоскости с осью Ox, а через $S(x)$ — площадь получившегося сечения.

Докажем, что площадь $S(x)$ равна площади S основания призмы. Для этого заметим, что треугольники ABC (основание призмы) и $A_1B_1C_1$ (сечение призмы рассматриваемой плоскостью) равны. В самом деле, четырехугольник AA_1B_1B — параллелограмм (отрезки AA_1 и BB_1 равны и параллельны), поэтому $A_1B_1 = AB$. Аналогично доказывается, что $B_1C_1 = BC$ и $A_1C_1 = AC$. Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны по трем сторонам. Следовательно, $S(x) = S$. Применяя теперь основную формулу для вычисления объемов тел при $a = 0$ и $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h S dx = S\int_0^h dx = S \cdot x\Big|_0^h = S \cdot h.$$

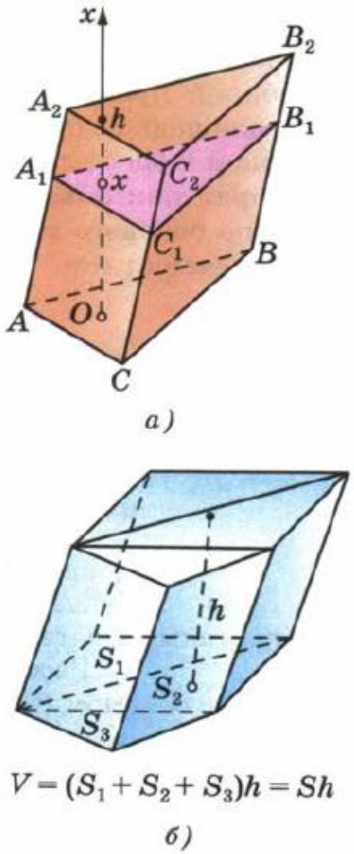


Рис. 185

Пример 9

80 Объем пирамиды

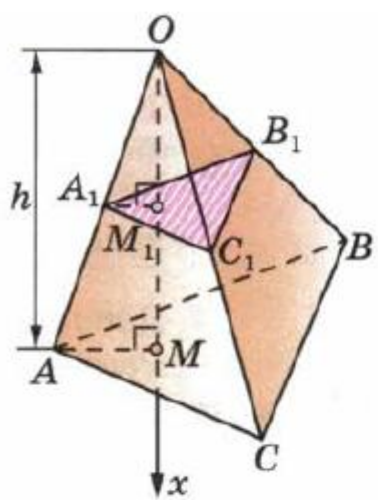
Теорема

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Доказательство

Сначала докажем теорему для треугольной пирамиды, а затем — для произвольной пирамиды.

1. Рассмотрим треугольную пирамиду $OABC$ с объемом V, площадью основания S и высотой h. Проведем ось Ox (рис. 186, a, где OM — высота пирамиды) и рассмотрим сечение $A_1B_1C_1$ пирамиды плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим через x абсциссу точки M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox, а через



$S(x)$ — площадь сечения. Выразим $S(x)$ через S, h и x. Заметим, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. В самом деле, $A_1B_1 \parallel AB$, поэтому $\triangle OA_1B_1 \sim \triangle OAB$. Следовательно, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$. Прямоугольные треугольники OA_1M_1 и OAM также подобны (они имеют общий острый угол с вершиной O). Поэтому $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM} = \frac{x}{h}$. Таким образом, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{x}{h}$. Аналогично доказывается, что $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$ и $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{x}{h}$. Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{x}{h}$. Следовательно, $\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, или $S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$.

Применяя теперь основную формулу для вычисления объемов тел при $a = 0$, $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}S\cdot h.$$

Пример 10

81 Объем конуса

Теорема

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Доказательство

Рассмотрим конус с объемом V, радиусом основания R, высотой h и вершиной в точке O. Введем ось Ox так, как показано на рисунке 187 (OM — ось конуса). Произвольное сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, является кругом с центром в точке M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox (п. 61). Обозначим радиус этого круга через R_1, а площадь сечения через $S(x)$, где x — абсцисса точки M_1. Из подобия прямоугольных треугольников OM_1A_1 и OMA следует, что

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{R_1}{R}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{h} = \frac{R_1}{R},$$

откуда $R_1 = \frac{R}{h}x$. Так как $S(x) = \pi R_1^2$, то

$$S(x) = \frac{\pi R^2}{h^2}x^2.$$

Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a = 0$, $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}x^2dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Площадь S основания конуса равна πR^2, поэтому $V = \frac{1}{3}Sh$. Теорема доказана. △

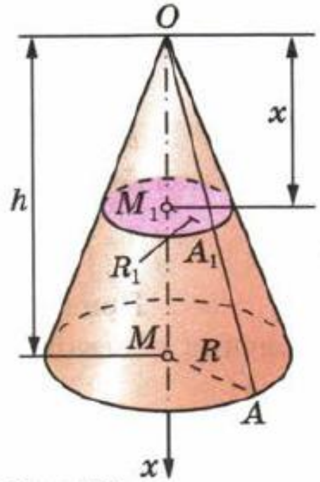


Рис. 187

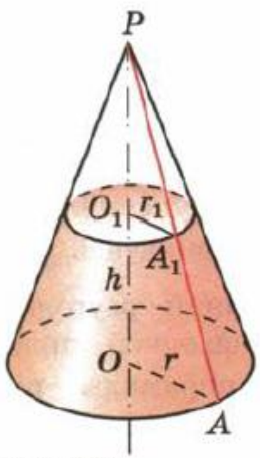


Рис. 188

Пример 11

82 Объем шара

Теорема

Объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Доказательство

Рассмотрим шар радиуса R с центром в точке O и выберем ось Ox произвольным образом (рис. 192). Сечение шара плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку M этой оси, является кругом с центром в точке M. Обозначим радиус этого круга через r, а его площадь через $S(x)$, где x — абсцисса точки M. Выразим $S(x)$ через x и R. Из прямоугольного треугольника OMC находим

$$r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Так как $S(x) = \pi r^2$, то

$$S(x) = \pi(R^2 - x^2). \qquad (1)$$

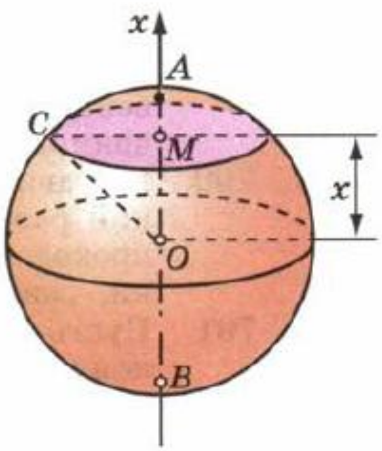


Рис. 192

Заметим, что эта формула верна для любого положения точки M на диаметре AB, т. е. для всех x, удовлетворяющих условию $-R \leqslant x \leqslant R$. Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a = -R$, $b = R$, получаем:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Теорема доказана. △

Рассмотрим примеры задач на формирование следующих умений учащихся, которые, на наш взгляд, будут способствовать развитию их критического мышления.

1. Распознавать конфигурации геометрических фигур по их изображениям и описаниям.

2. Сравнивать и оценивать геометрические величины.

3. Устанавливать верность и неверность утверждений.

4. Находить ошибки в формулировках и доказательствах.

5. Приводить контрпримеры.

6. Решать задачи с неоднозначным ответом.

1. РАСПОЗНАВАНИЕ

1. Параллельны ли прямые *AB* и *CD*, изображённые на рисунке 1?

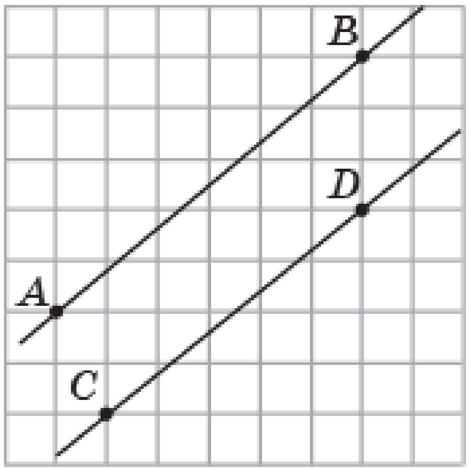


Рис. 1

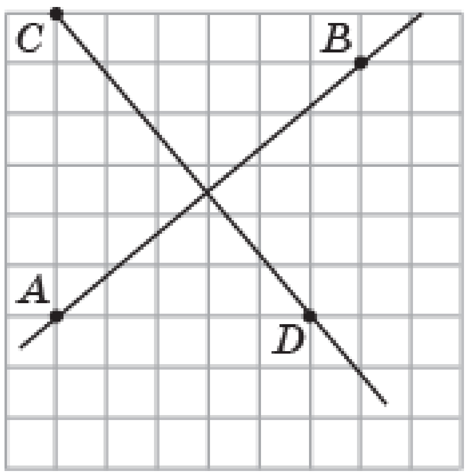


Рис. 2

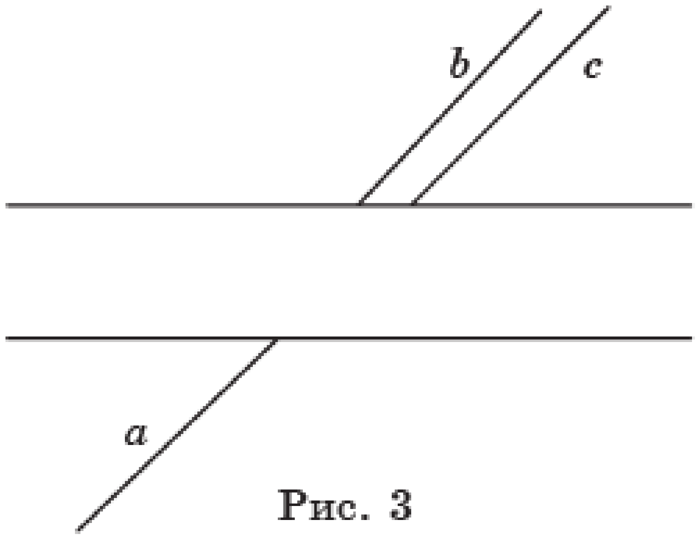


Рис. 3

2. Перпендикулярны ли прямые *AB* и *CD*, изображённые на рисунке 2?

3. Не используя линейку, скажите, какие две линии *a* и *b* или *a* и *c* на рисунке 3 изображают одну и ту же прямую. Ответ проверьте с помощью линейки.

4. Не используя линейку, скажите, являются ли линии *a* и *b*, изображённые на рисунке 4, прямыми или нет. Ответ проверьте с помощью линейки.

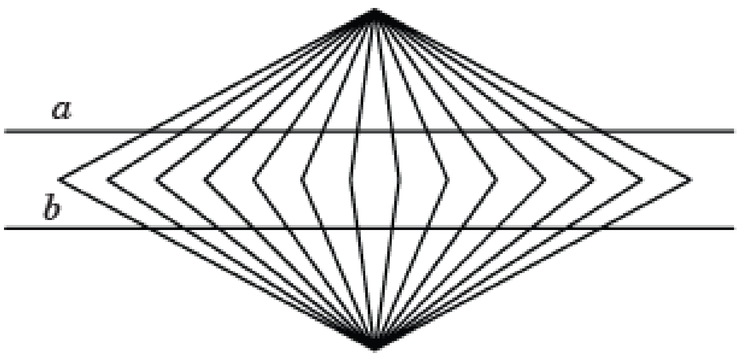


Рис. 4

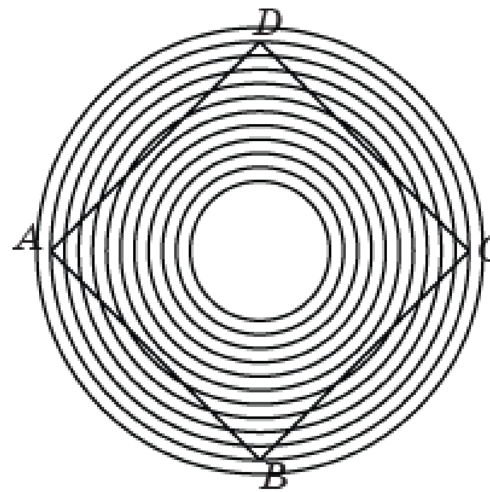


Рис. 5

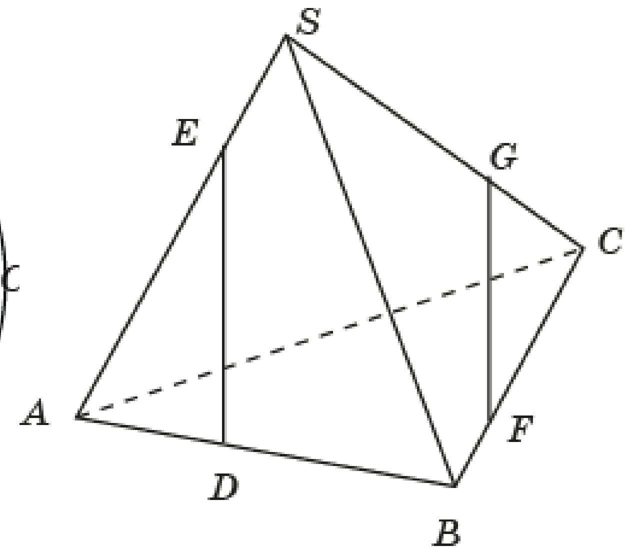


Рис. 6

5. Является ли линия *ABCD* (рис. 5) составленной из отрезков или из кривых? Ответ проверьте с помощью линейки.

6. Как в пространстве расположены прямые *DE* и *FG* (рис. 6)?

7. Пересекаются ли прямые DE и FG (рис. 7)?

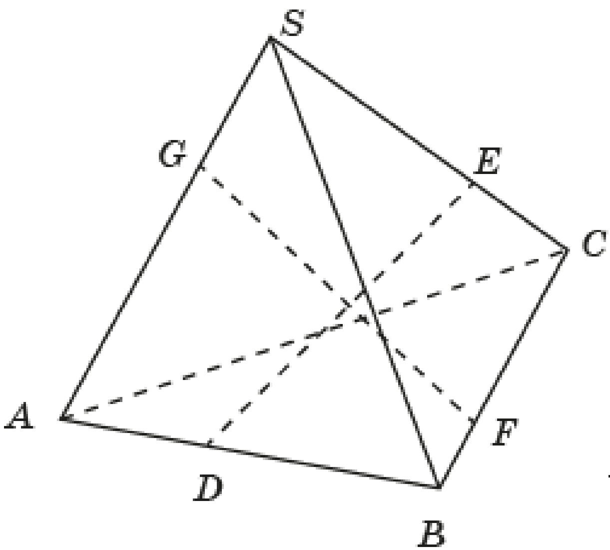


Рис. 7

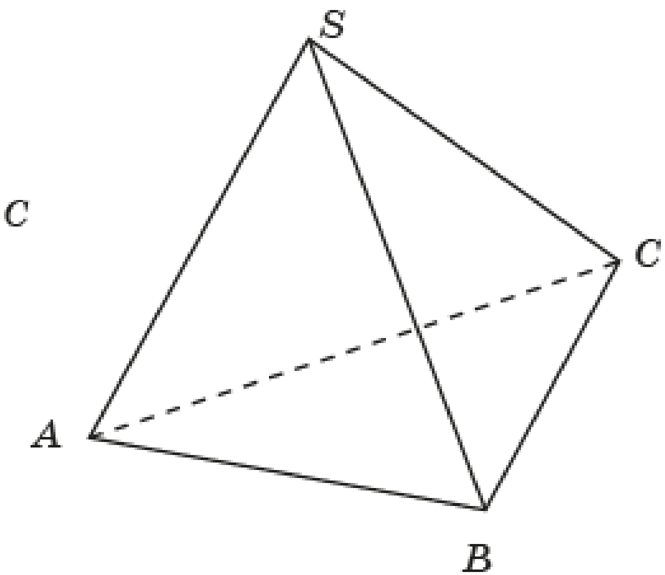


Рис. 8

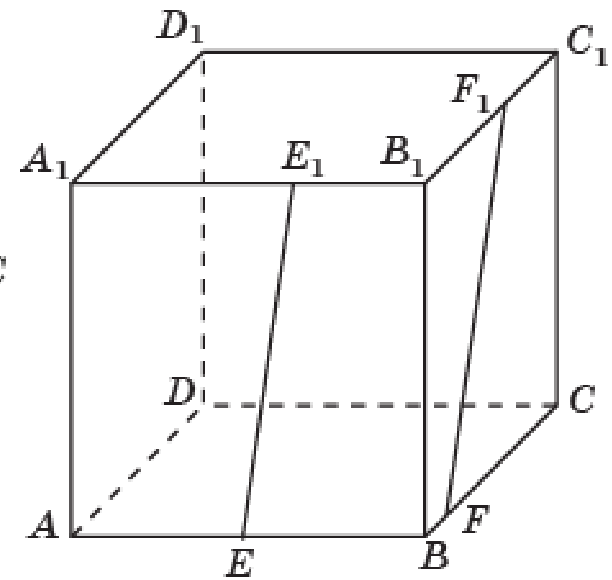


Рис. 9

8. Как в пространстве расположены рёбра SA и BC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 8)?

9. Как в пространстве расположены прямые EE_1 и FF_1 (рис. 9)?

10. Пересекаются ли прямые DB_1 и CD_1 (рис. 10)?

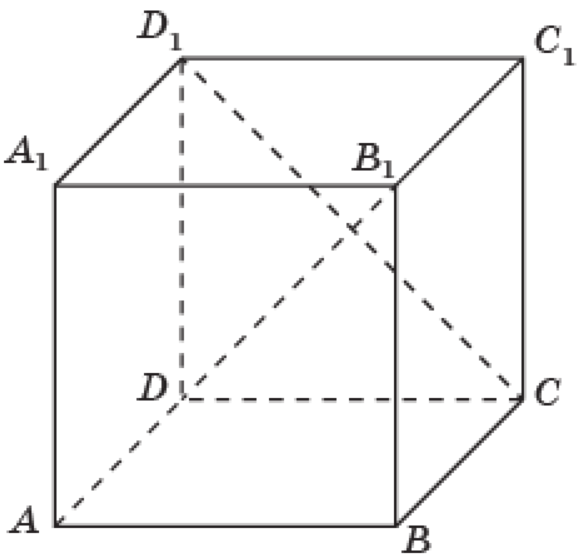


Рис. 10

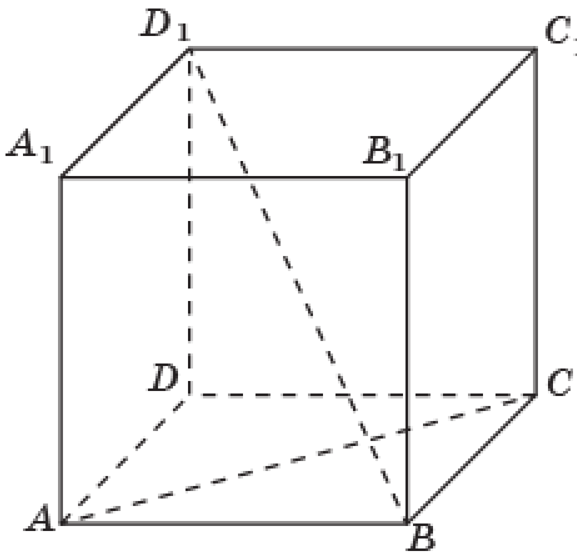


Рис. 11

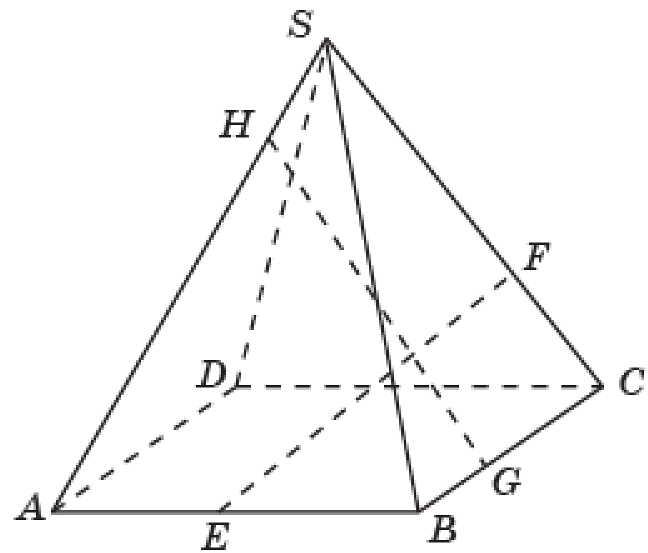


Рис. 12

11. Как в пространстве расположены прямые AC и BD_1 (рис. 11)?

12. Как в пространстве расположены прямые EF и GH (рис. 12)?

13. Сколько общих точек имеют плоскости α и β (рис. 15)?

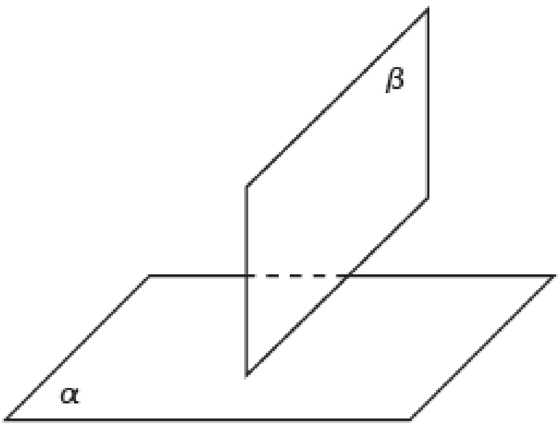


Рис. 15

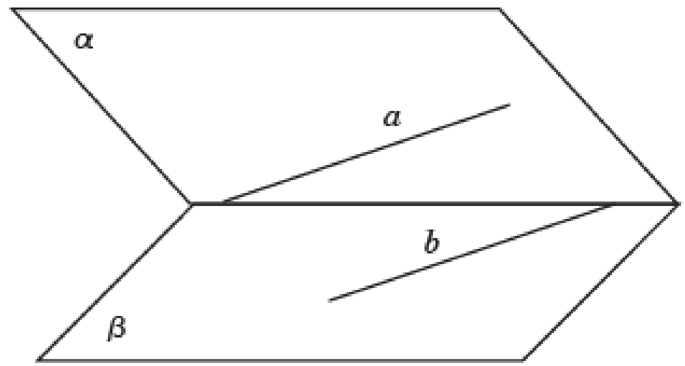


Рис. 16

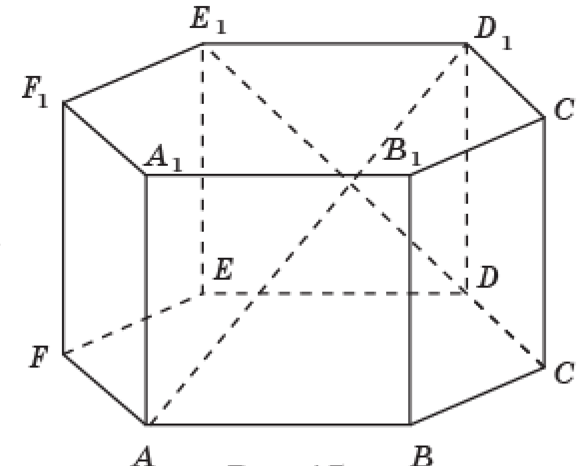


Рис. 17

14. Как в пространстве расположены прямые a и b, лежащие в плоскостях соответственно α и β (рис. 16)?

15. Как расположены прямые AD_1 и CE_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы (рис. 17)?

16. Как расположены прямая A_1B_1 и плоскость ACD_1, проходящие через вершины куба (рис. 18)?

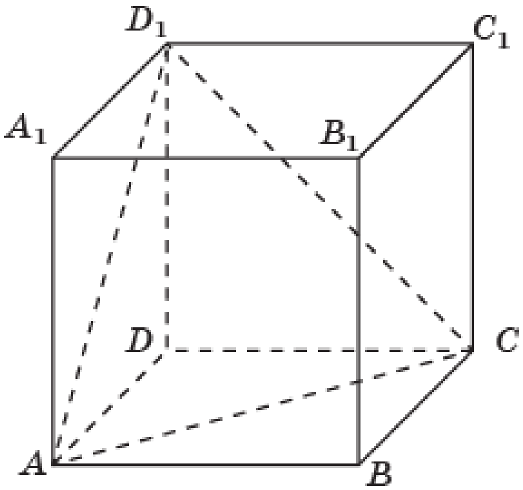


Рис. 18

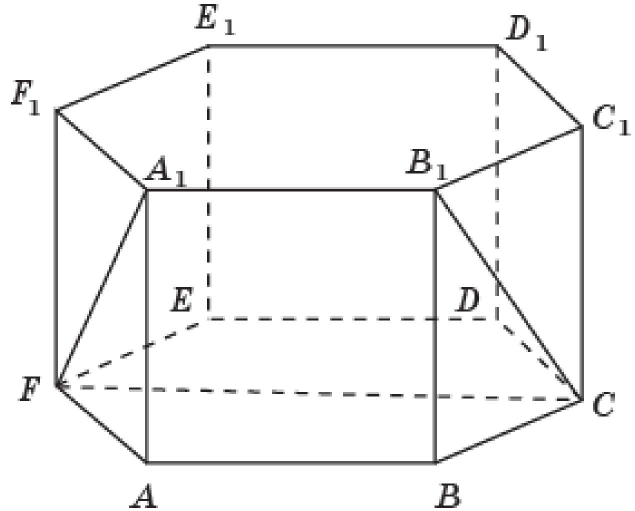


Рис. 19

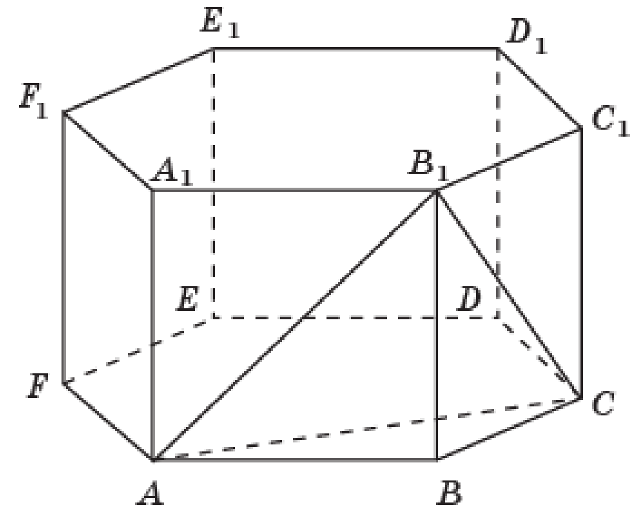


Рис. 20

17. Как расположены прямая C_1D_1 и плоскость CFA_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы (рис. 19)?

18. Как расположены прямая D_1E_1 и плоскость ACB_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы (рис. 20)?

19. Как расположены плоскости ACD_1 и BC_1A_1, проходящие через вершины куба (рис. 21)?

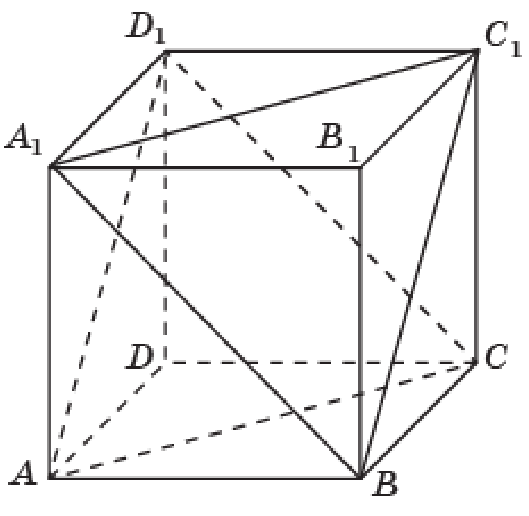


Рис. 21

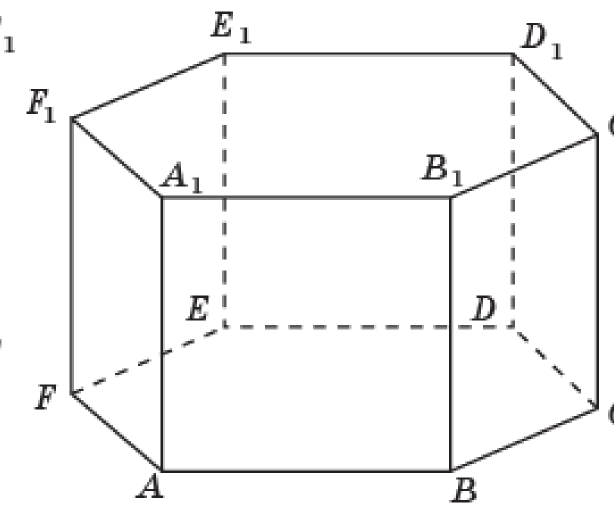


Рис. 22

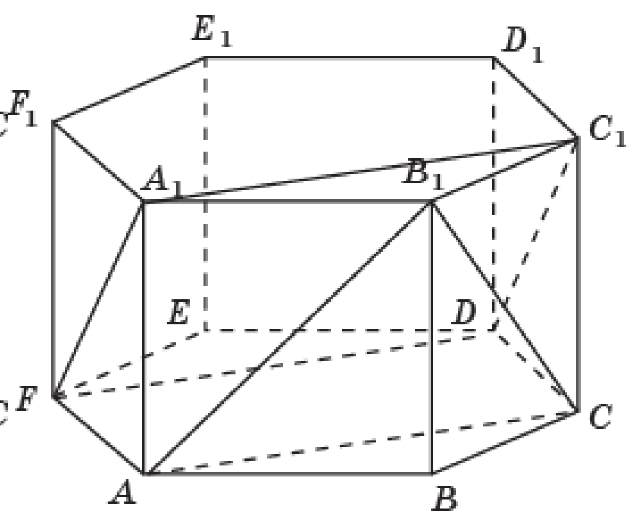
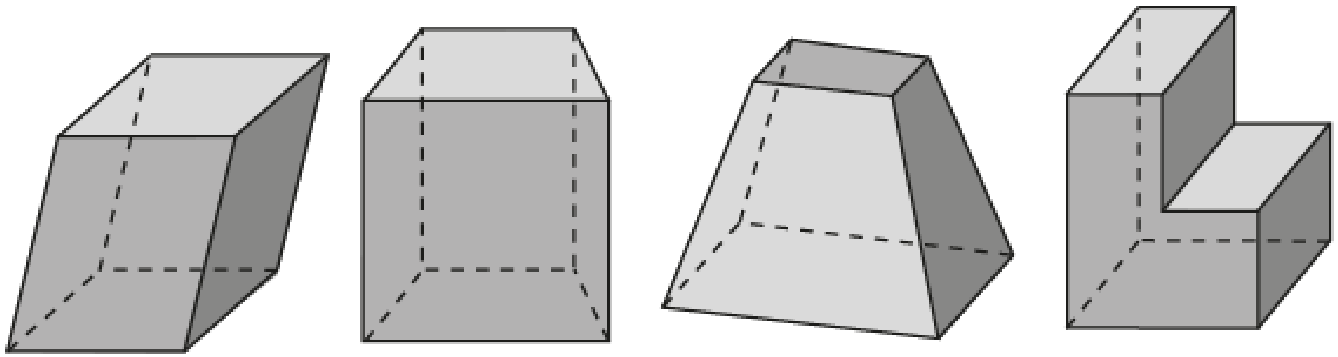


Рис. 23

20. Как расположены плоскости BCC_1 и AFF_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы (рис. 22)?

21. Как расположены плоскости ACB_1 и FDC_1, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы (рис. 23)?

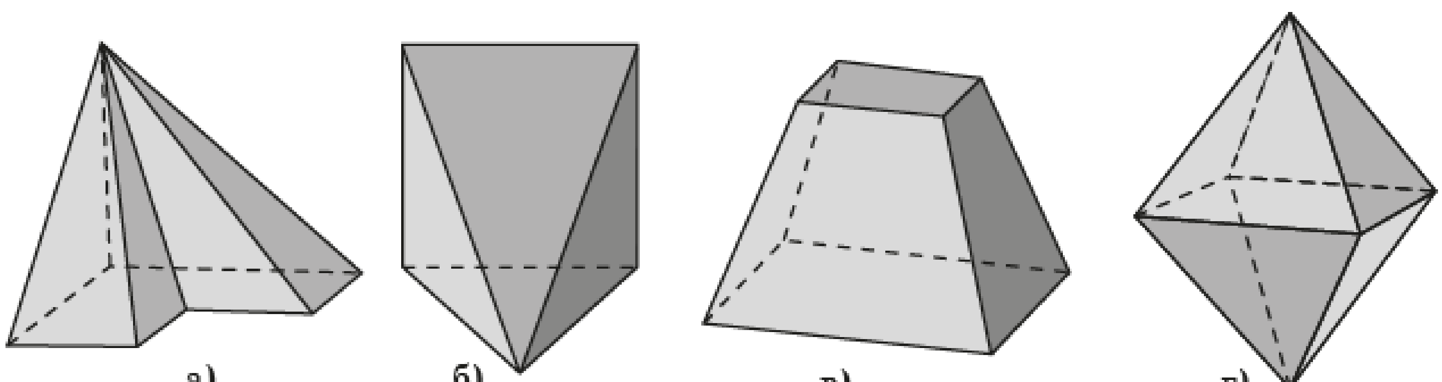
22. На рисунке 24 укажите призмы.



а) б) в) г)

Рис. 24

23. На рисунке 25 укажите пирамиды.



а) б) в) г)

Рис. 25

2. СРАВНЕНИЕ И ОЦЕНКА

1. Сравните длины отрезков AB и CD, изображённых на рисунке 31.

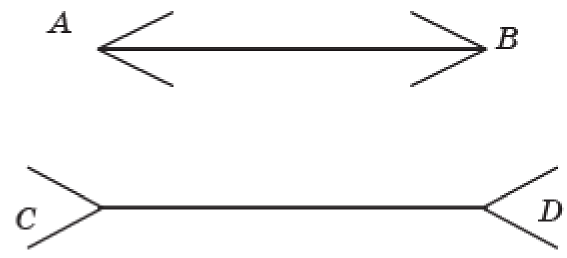


Рис. 31

2. Сравните длины отрезков AB и CD, изображённых на рисунке 32.

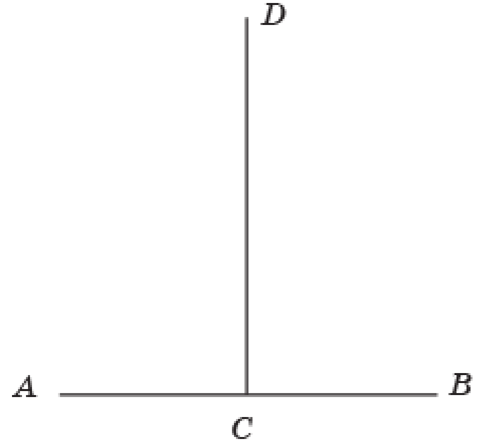


Рис. 32

3. Сравните длины отрезков AB и CD, изображённых на рисунке 33.

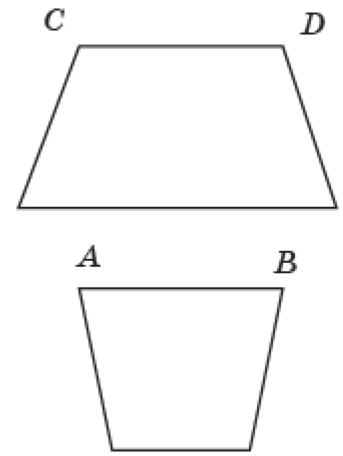


Рис. 33

4. Сравните длины отрезков AC и BC, изображённых на рисунке 35.

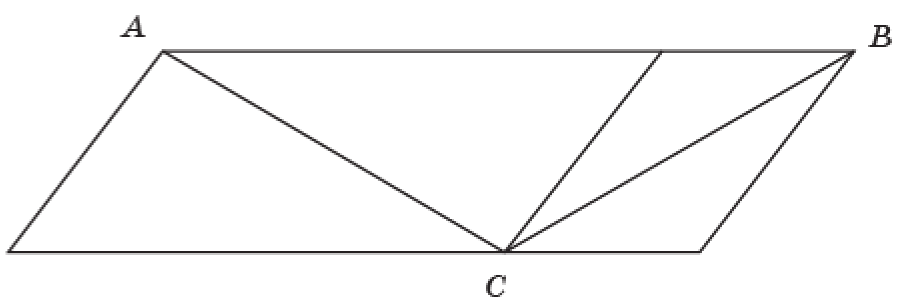


Рис. 35

5. Какой из двух внутренних кругов, изображённых на рисунке 36, больше?

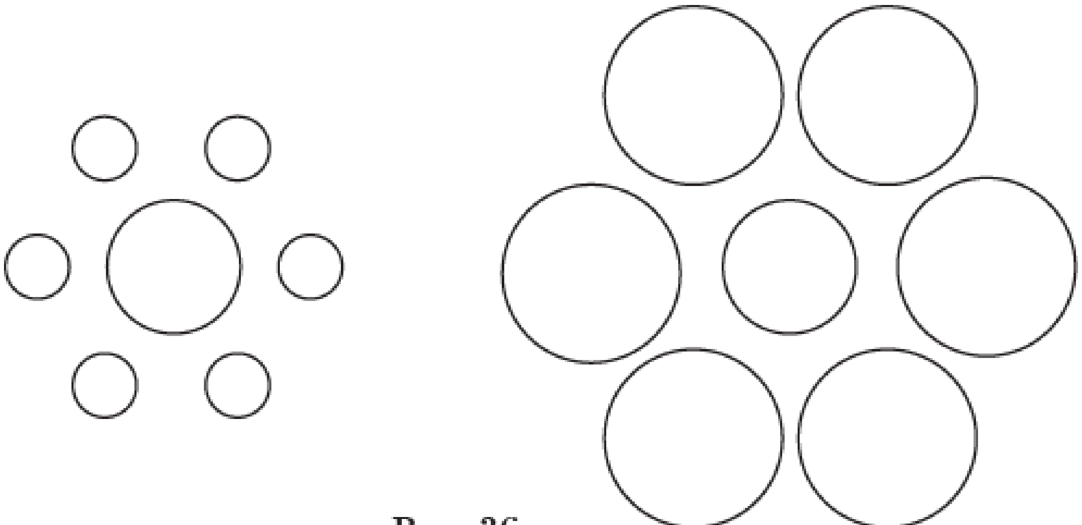


Рис. 36

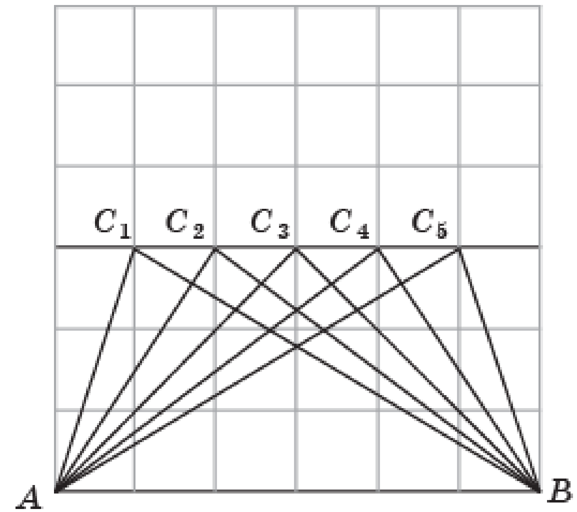


Рис. 37

6. Сравните длины ломаных AC_iB ($i = 1,\ldots,5$) (рис. 37).

7. Требуется проложить шоссейные дороги, соединяющие населённые пункты *A*, *B*, *C*, *D*, расположенные в вершинах прямоугольника (рис. 39). Не производя вычислений, оцените, в каком расположении дорог их суммарная длина наименьшая.

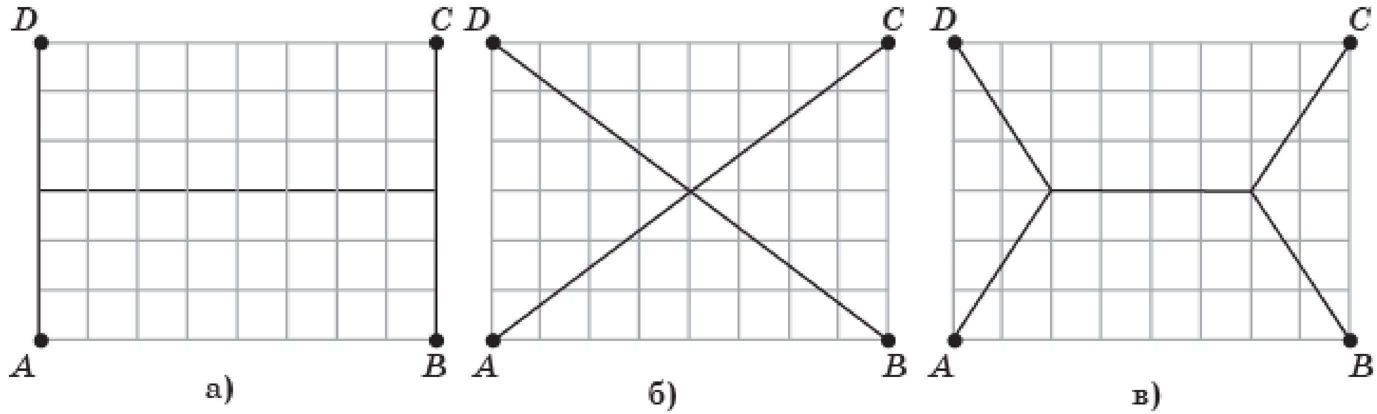


Рис. 39

8. Сравните углы *ABC* и *DEF*, изображённые на рисунке 40.

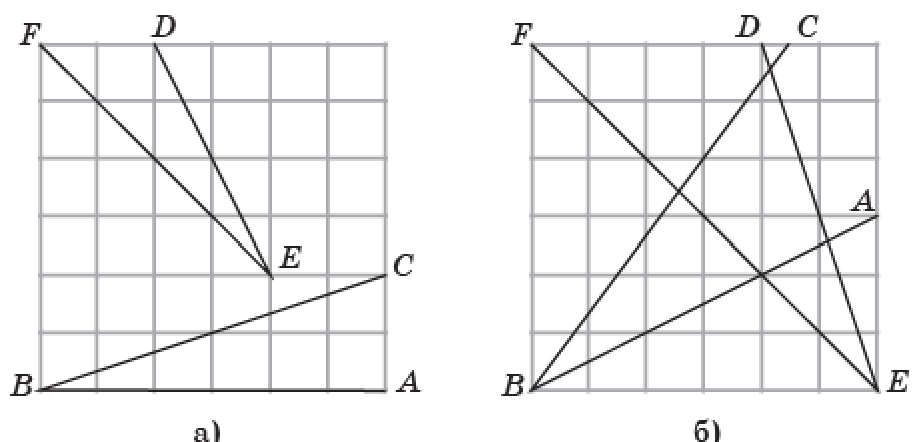
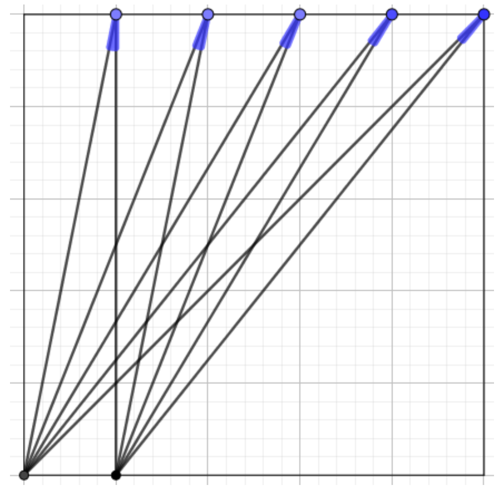


Рис. 40

9. Найдите сумму углов, изображённых на рисунке и закрашенных синим цветом.



10. Для трапеции *ABCD* (рис. 41) *O* – точка пересечения диагоналей *AC* и *BD*. Сравните площади треугольников *AOD* и *BOC*.

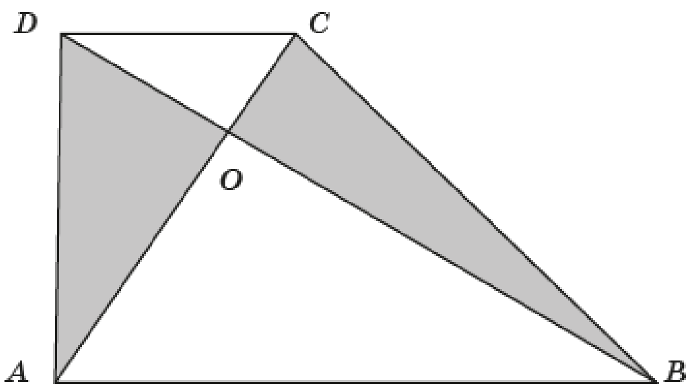


Рис. 41

11. Два параллелограмма *ABCD* и *DEFG* расположены так, как показано на рисунке 42. Сравните их площади.

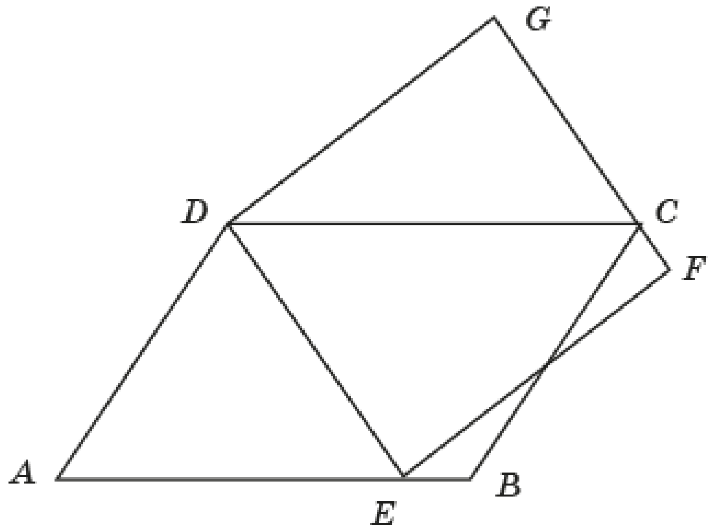


Рис. 42

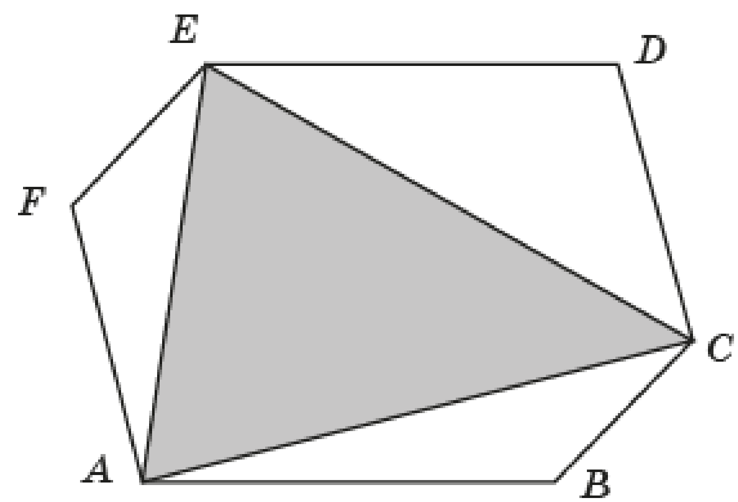


Рис. 44

12. Сравните площади шестиугольника *ABCDEF*, у которого противолежащие стороны равны и параллельны (рис. 44), и закрашенного треугольника *ACE*.

13. Сколько тетраэдров изображено на рисунке 26?

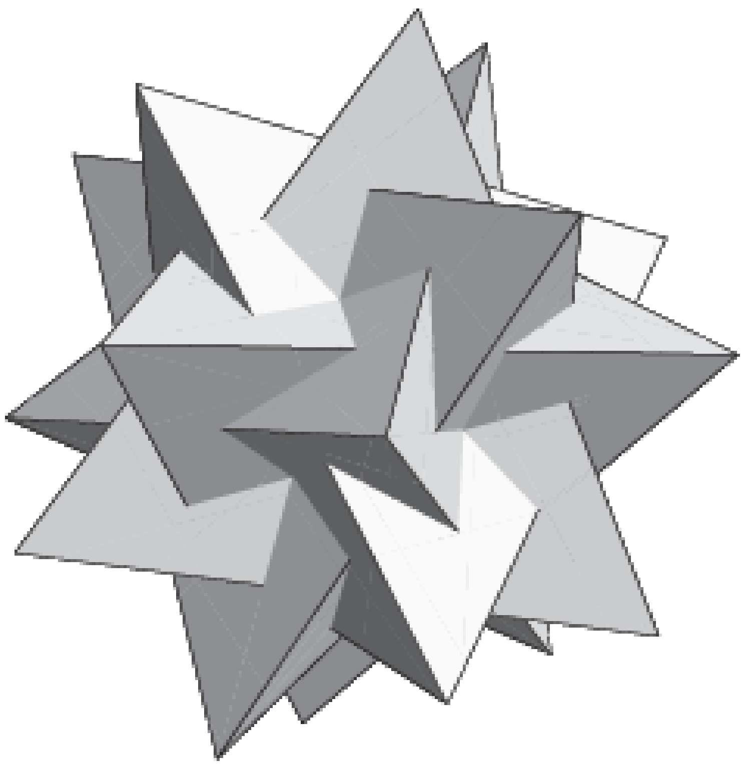


Рис. 26

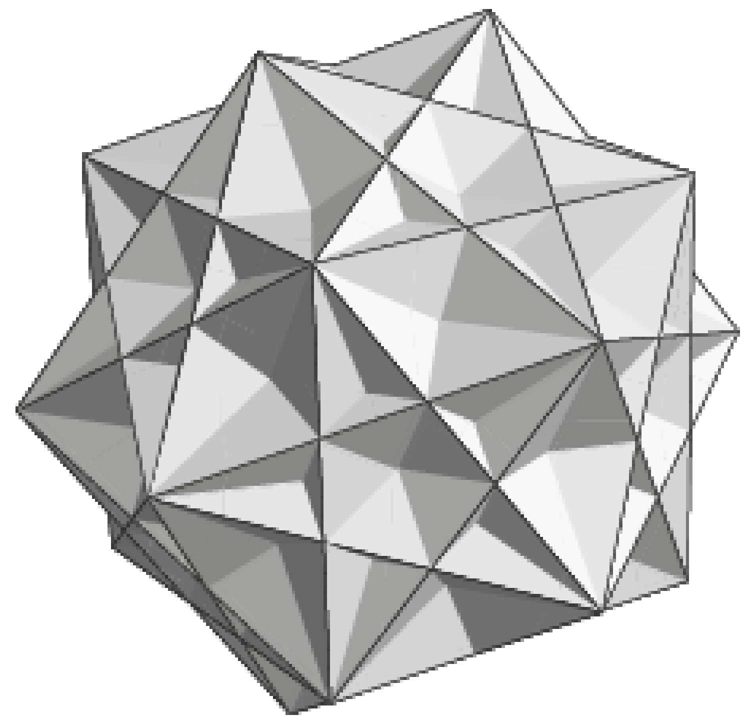


Рис. 27

14. Сколько кубов изображено на рисунке 27?

15. Укажите номер многогранника, развёртка которого изображена на рисунке 29.

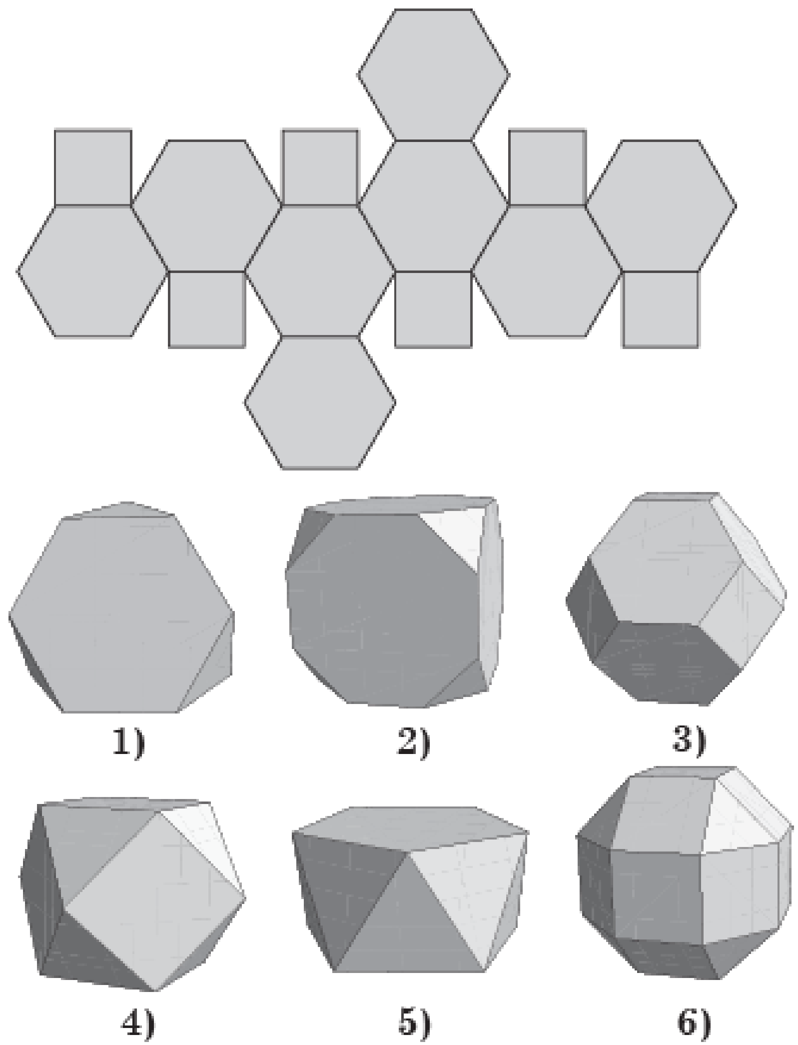


Рис. 29

16. Не производя вычислений, оцените, какую часть объёма единичного куба составляет объём единичного правильного тетраэдра (рис. 46).

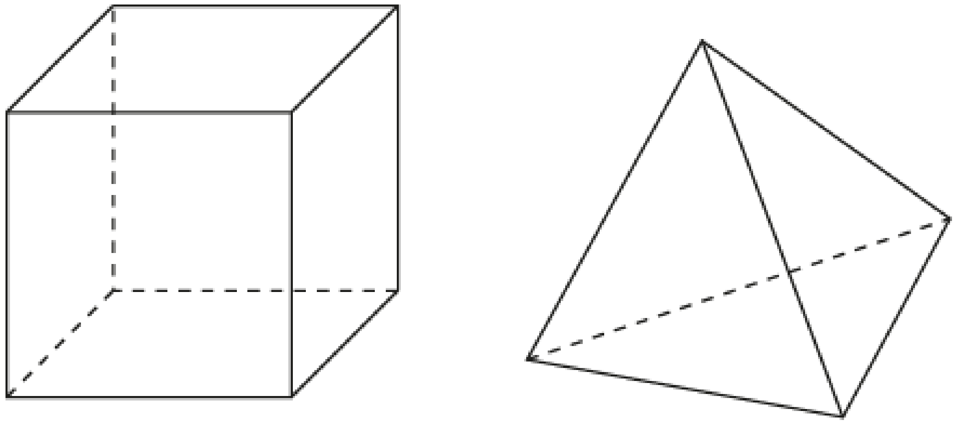


Рис. 46

17. В фужере в форме перевёрнутого конуса имеется вода, полностью его заполняющая (рис. 47). Требуется отлить половину этой воды в стакан. Какую часть высоты конуса должна занимать оставшаяся в конусе вода?

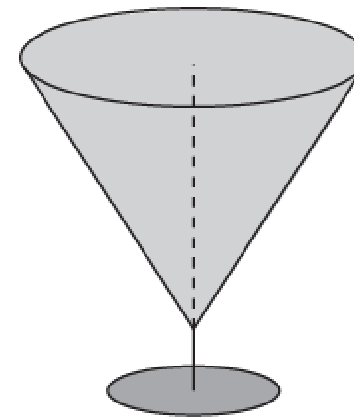


Рис. 47

18. Толщина кожуры апельсина составляет одну пятую его радиуса (рис. 49). Оцените, какую часть объёма апельсина занимает его кожура.

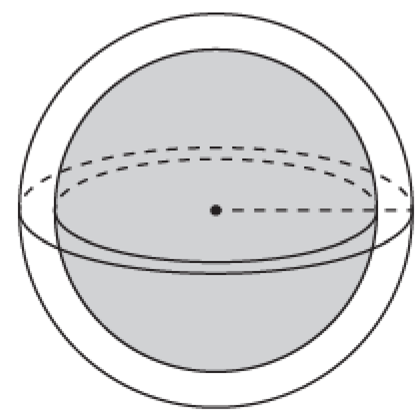


Рис. 49

3. УТВЕРЖДЕНИЯ

Укажите номера верных утверждений.

1

1. Через любые две точки проходит не более одной прямой.
2. Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние односторонние углы равны, то эти две прямые параллельны.
3. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы составляют в сумме 180 .
4. Если угол равен 30^o, то смежный с ним угол равен 150^o.

2

1. Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
2. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является одновременно биссектрисой и высотой.
3. Каждая сторона треугольника больше суммы двух других сторон.
4. В треугольнике против большего угла лежит меньшая сторона.

3

1. Сумма острых углов прямоугольного треугольника меньше 180^o.
2. Если один из углов равнобедренного треугольника равен 100^o, то один из оставшихся углов равен 40^o.
3. Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним.
4. В треугольнике ABC, для которого $A = 40^o$, $B = 50^o$, $C = 90^o$, сторона AC – наименьшая.

4

1. Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то эти прямая и окружность пересекаются.
2. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности.
3. Через любые три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит не менее одной окружности.
4. Если радиусы двух окружностей равны 3 и 5, а расстояние между их центрами равно 1, то эти окружности пересекаются.

5

1. Вписанный угол измеряется величиной дуги окружности, на которую он опирается.

2. Центральный угол измеряется половиной дуги окружности, на которую он опирается.

3. Если вписанный угол равен 30^{o}, то центральный угол, опирающийся на ту же дугу, равен 60^{o}.

4. Если дуга окружности составляет 80^{o}, то центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен 80^{o}.

6

1. Сумма углов выпуклого четырехугольника не превосходит 360^{o}.

2. Сумма двух противоположных углов параллелограмма равна 180 .

3. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и меньше их суммы.

4. Если одна диагональ параллелограмма равна 5, то другая его диагональ равна 5.

7

1. Если все стороны четырехугольника равны и один из его углов равен 90^o, то этот четырехугольник – квадрат.
2. Если в четырехугольнике диагонали перпендикулярны, то этот четырехугольник является ромбом.
3. Если сумма двух углов выпуклого четырехугольника равна 100^o, то сумма двух оставшихся углов равна 80^o.
4. Если основания трапеции равны 6 и 8, то средняя линия этой трапеции равна 14.

8

1. Около всякого треугольника можно описать не менее одной окружности.
2. Если стороны треугольника равны 3, 4, 5, то радиус описанной около него окружности, равен 2,5.
3. В любой параллелограмм можно вписать окружность.
4. В любой правильный многоугольник можно вписать не более одной окружности.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Найдите ошибки в доказательствах следующих утверждений.

Утверждение 1. Если две стороны и угол, лежащий против одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему против одной из них, другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$. Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 так, чтобы вершина C перешла в точку C_2, лежащую по другую сторону от точки C_1 относительно прямой A_1B_1 (рис. 50).

Из равенства сторон A_1C_1 и A_1C_2 следует, что треугольник $C_1A_1C_2$ равнобедренный, значит, $A_1C_1C_2 = A_1C_2C_1$. Из этого и равенства углов C_1 и C_2 следует равенство углов $B_1C_1C_2$ и $B_1C_2C_1$. Значит, треугольник $B_1C_1C_2$ равнобедренный. Следовательно, его стороны B_1C_1 и B_1C_2 равны. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1C_2$ равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1C_1 = A_1C_2$, $B_1C_1 = B_1C_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$). Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

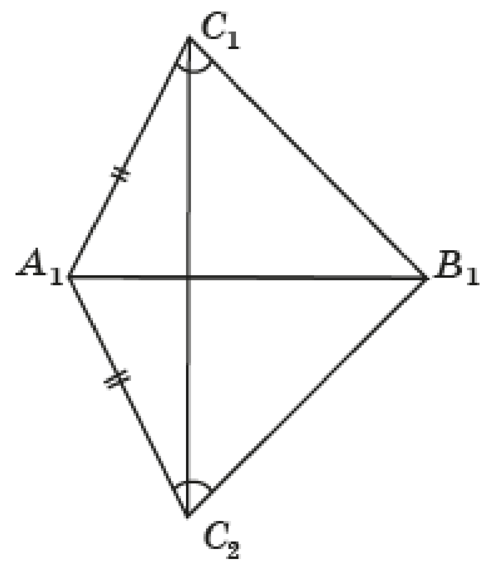
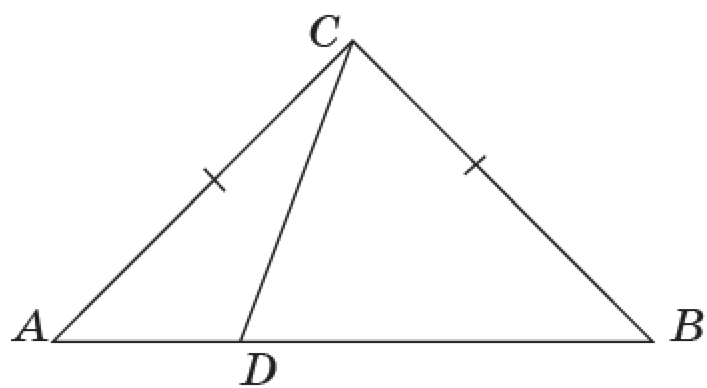


Рис. 50

Контрпример приведён на рисунке. В треугольниках ACD и BCD $AC = BC$, CD – общая сторона, $\angle A = \angle B$, однако треугольники не равны.



Утверждение 2. Если две стороны и высота, проведённая к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1 (рис. 51). Прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол CBH равен углу $C_1B_1H_1$. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

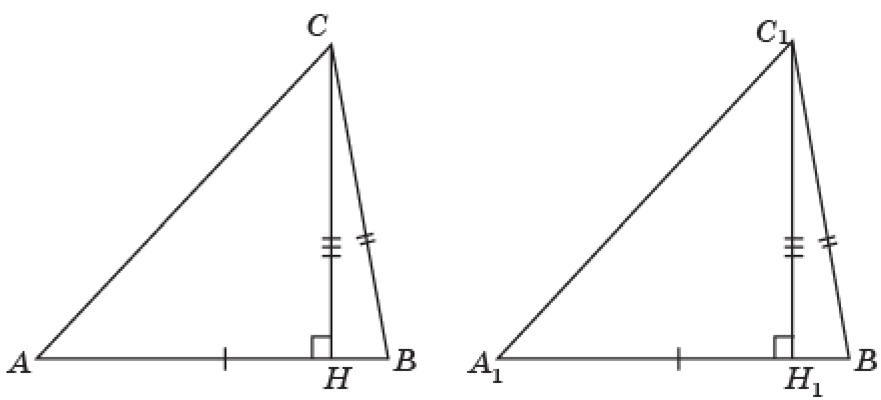
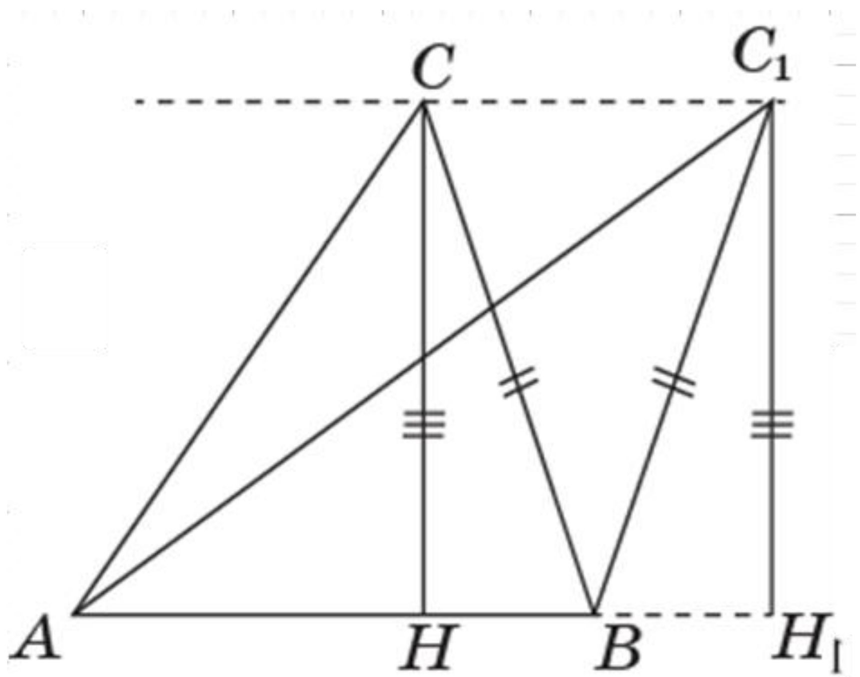


Рис. 51

Контрпример приведён на рисунке. В треугольниках ABC и ABC_1 $BC = BC_1$, $CH = C_1H_1$, однако треугольники не равны.



Утверждение 3. Если две стороны и высота, проведённая из их общей вершины, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, высота CH равна высоте C_1H_1 (рис. 52). Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол ACH равен углу $A_1C_1H_1$. Прямоугольные треугольники BCH и $B_1C_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол BCH равен углу $B_1C_1H_1$. Следовательно, углы ACB и $A_1C_1B_1$ равны, как суммы равных углов. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

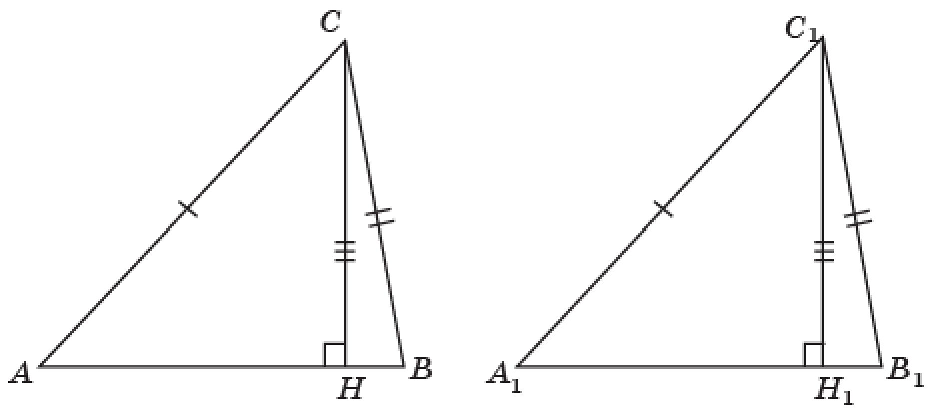
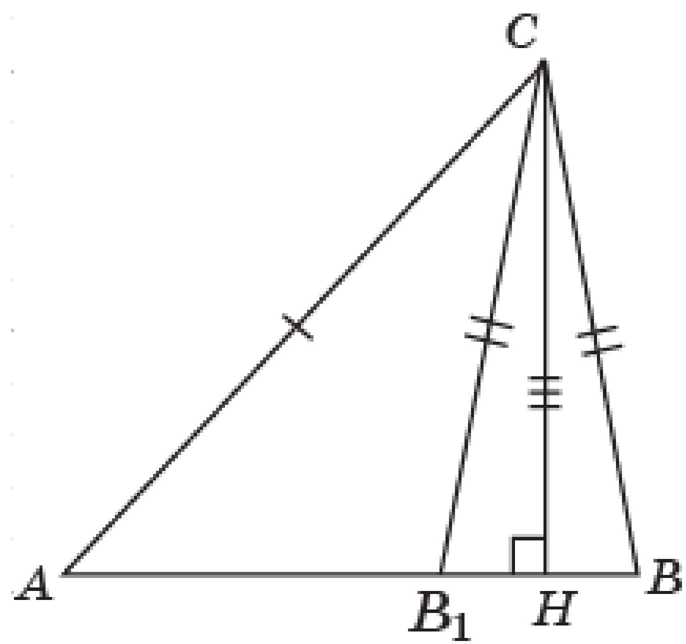


Рис. 52

Контрпример приведён на рисунке. В треугольниках ABC и AB_1C AC – общая сторона, $BC = B_1C$, CH – общая высота, однако треугольники не равны.



Утверждение 4. Если сторона и две высоты, опущенные из её вершин, одного треугольника соответственно равны стороне и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, высота AG равна высоте A_1G_1, высота BH равна высоте B_1H_1 (рис. 53). Прямоугольные треугольники ABG и $A_1B_1G_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол B равен углу B_1. Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по гипотенузе и катету. Следовательно, угол A равен углу A_1. Значит, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

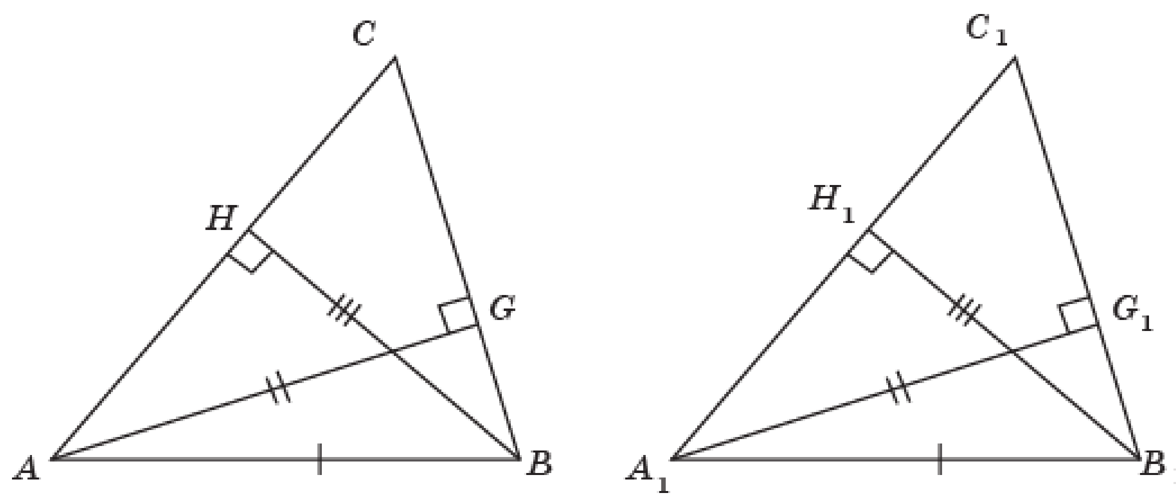


Рис. 53

Контрпример приведён на рисунке 86. Треугольники ABC и ABC_1 не равны, но у них сторона AB и высота BH – общие, высоты AG и AG_{1}- равны.

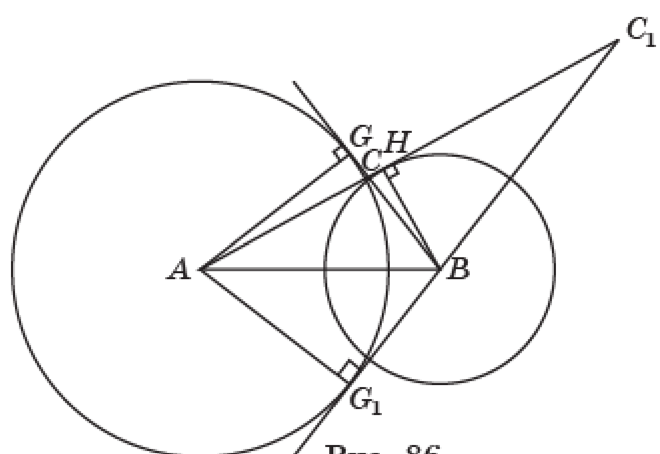


Рис. 86

Утверждение 5. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведённая к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1, сторона AB равна стороне A_1B_1, медиана BM равна медиане B_1M_1 (рис. 54). Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу. Следовательно, $AM = A_1M_1$. Значит, равны стороны AC и A_1C_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

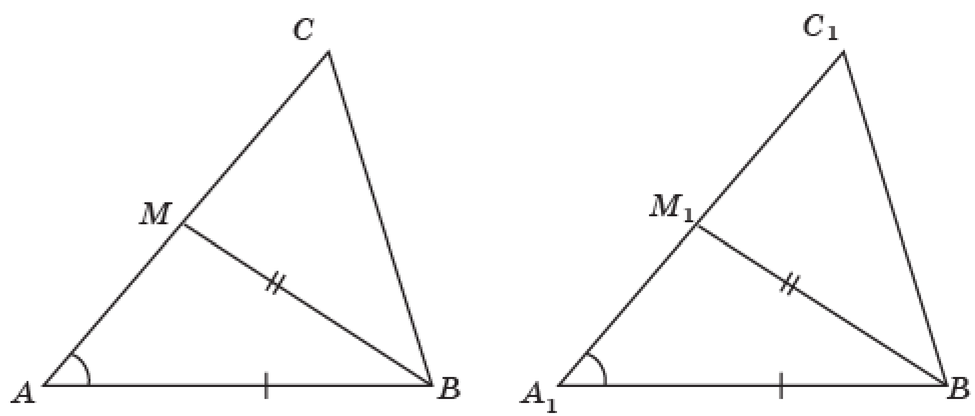


Рис. 54

Контрпример приведён на рисунке 87. В треугольниках ABC и AB_1C сторона AC – общая, угол A – общий, медианы CM и CM_1 равны. Однако, сами треугольники ABC и AB_1C не равны.

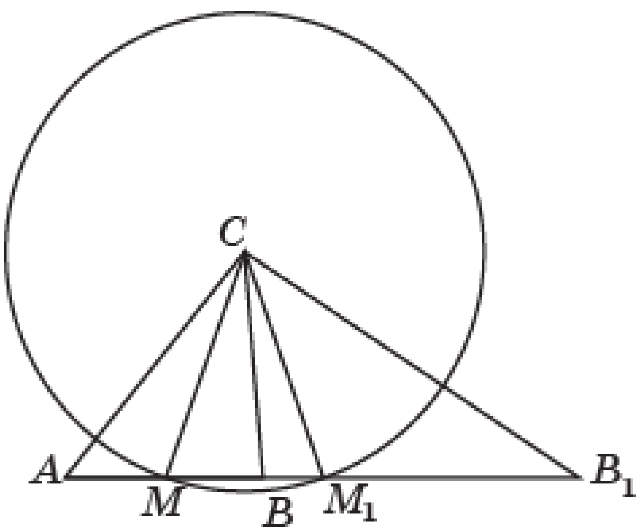


Рис. 87

Утверждение 6. Если две стороны и радиус описанной окружности одного треугольника соответственно равны двум сторонам и радиусу описанной окружности другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и R – радиус описанных около них окружностей (рис. 60). Обозначим O и O_1 соответственно центры этих окружностей. Треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, угол BAO равен углу $B_1A_1O_1$. Треугольники AOC и $A_1O_1C_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, угол CAO равен углу $C_1A_1O_1$. Значит, угол BAC равен углу $B_1A_1C_1$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

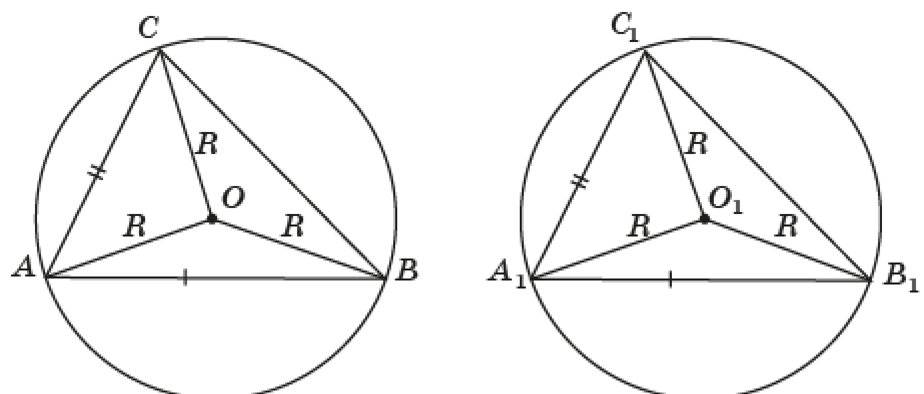


Рис. 60

Контрпример приведён на рисунке 93. В треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB – общая, описанная окружность – общая, $AC = AC_1$. Однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

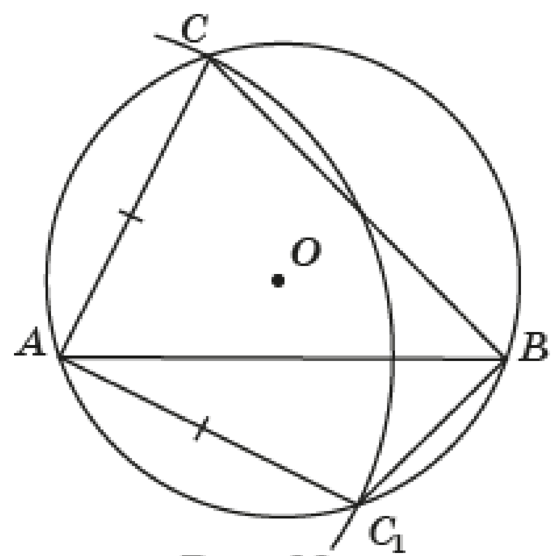


Рис. 93

Утверждение 7. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна его катету.

Доказательство. Пусть *ABC* – прямоугольный треугольник (угол *C* – прямой) (рис. 62). Докажем, что гипотенуза *AB* равна катету *AC*. Проведём биссектрису угла *A* и серединный перпендикуляр к стороне *BC*. Обозначим через *E* их точку пересечения. Соединим отрезками точку *E* с вершинами *B* и *C*. Из точки *E* опустим перпендикуляры *EF* и *EG* соответственно на стороны *AC* и *AB* треугольника *ABC*. Так как точка *E* принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку *BC*, то отрезки *BE* и *CE* равны. Так как точка *E* принадлежит биссектрисе угла *A*, то отрезки *EF* и *EG* равны. Прямоугольные треугольники *BEG* и *CEF* равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки *BG* и *CF* равны. Прямоугольные треугольники *AEG* и *AEF* равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки *AG* и *AF* равны. Складывая отрезки *AG* и *BG*, *AF* и *CF*, получаем равенство гипотенузы *AB* и катета *AC*.

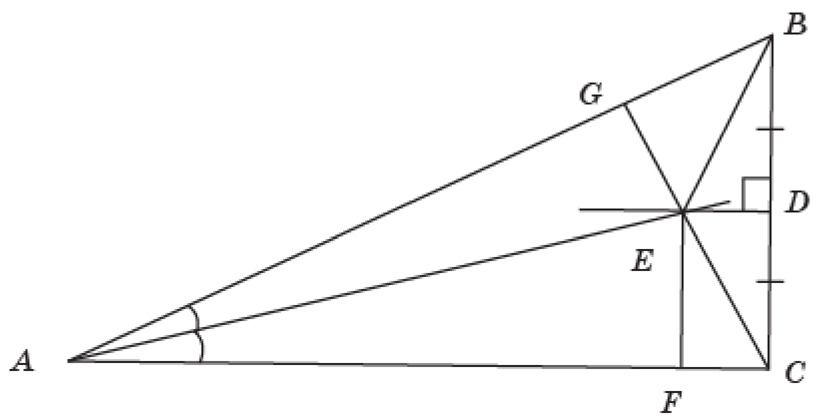


Рис. 62

Решение. Неправильно выполнен рисунок. Построить правильный рисунок поможет программа GeoGebra. В ней можно построить прямоугольный треугольник ABC, провести биссектрису угла A и серединный перпендикуляр к отрезку BC, найти их точку пересечения E, опустить из неё перпендикуляры на прямые, содержащие стороны AC и AB (рис. 78).

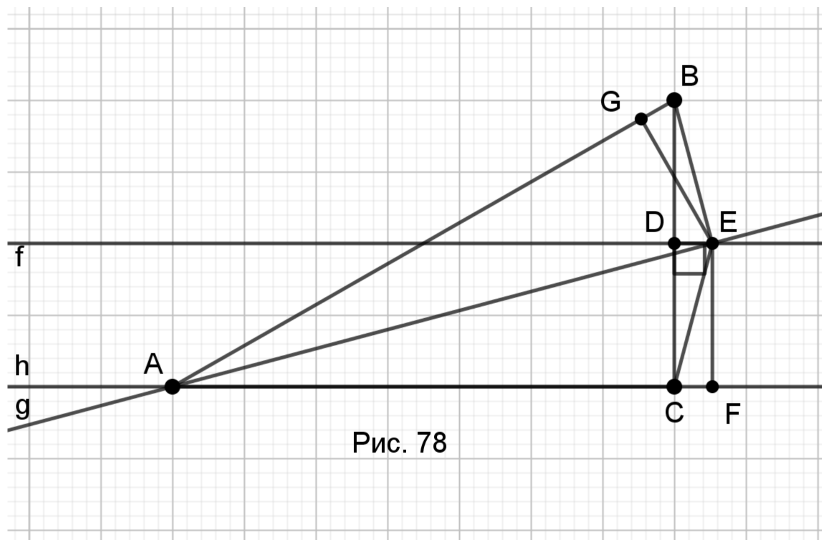


Рис. 78

Утверждение 8. Прямой угол равен тупому углу.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – четырёхугольник (рис. 64), в котором $AD = BC$, угол D прямой, угол C тупой. Докажем, что углы D и C равны. Проведём серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD. Обозначим через G их точку пересечения. Прямоугольные треугольники AEG и BEG равны по двум катетам. Следовательно, $AG = BG$. Прямоугольные треугольники DFG и CFG также равны по двум катетам. Следовательно, $DG = CG$, $\angle GDF = \angle GCF$. Треугольники AGD и BGC равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle ADG = \angle BCG$. Вычитая из второго равенства углов первое, получаем равенство углов ADC и BCD, т. е. получаем, что прямой угол ADC равен тупому углу BCD.

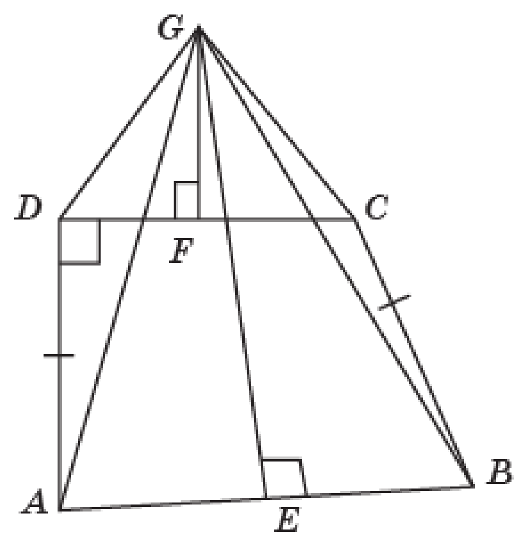


Рис. 64

Решение. Из равенства углов *ADG* и *BCG*, *GDF* и *GCF* не следует равенство углов *ADC* и *BCD* (рис. 81), так как угол *ADC* равен разности углов *ADG* и *CDF*, а угол *BCD* равен сумме углов *BCG* и *GCF*.

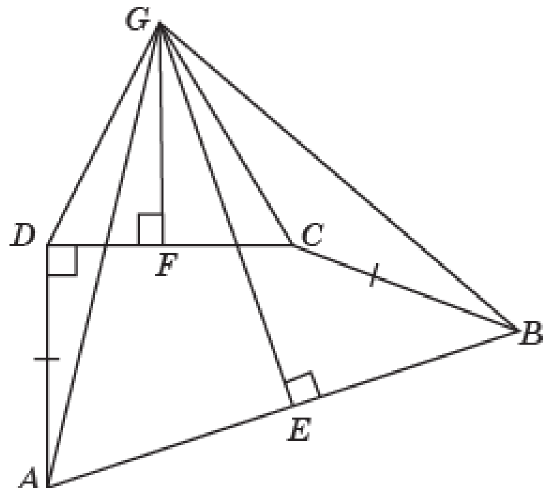


Рис. 81

Утверждение 9. Если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны, то две другие стороны параллельны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – четырёхугольник, у которого равны стороны AD и BC (рис. 65). Проведём серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD. Если они параллельны, то стороны AB и CD параллельны, так как они будут перпендикулярны параллельным прямым. Если эти серединные перпендикулярны не параллельны, то обозначим через G их общую точку. Прямоугольные треугольники AEG и BEG равны по двум катетам. Следовательно, $AG = BG$, $\angle AGE = \angle BGE$. Прямоугольные треугольники DFG и CFG также равны по двум катетам. Следовательно, $DG = CG$, $\angle DGF = \angle CGF$. Треугольники AGD и BGC равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle AGD = \angle BGC$. Так как сумма всех рассмотренных углов равна 360°, то из равенства их пар следует, что сумма углов AGE, AGD и DGF равна 180°. Значит, серединные перпендикуляры совпадают. В этом случае стороны AB и CD будут перпендикулярны одной прямой, следовательно, параллельны.

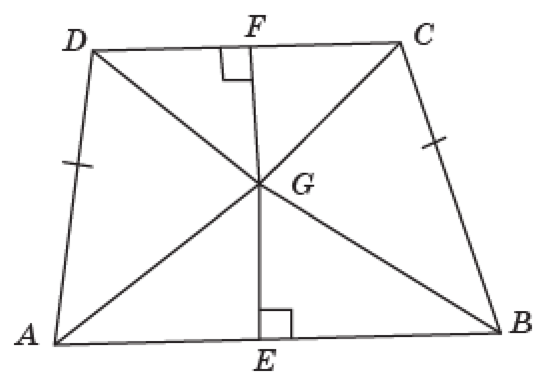


Рис. 65

Утверждение 10. Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство. Рассмотрим треугольник *ABC* (рис. 66). Зададим на прямой *AB* направление (указано стрелкой). Повернём прямую *AB* вокруг точки *A* на угол *A*. Она перейдёт в прямую *AC*. Повернём прямую *AC* вокруг точки *C* на угол *C*. Она перейдёт в прямую *BC*. Повернём прямую *BC* вокруг точки *B* на угол *B*. Она перейдёт в прямую *BA* с направлением, противоположным начальному направлению прямой *AB*. Таким образом, прямая *AB* повернулась на 180°. С другой стороны, этот поворот на 180° складывается из поворотов на углы *A*, *B* и *C*. Следовательно, сумма углов *A*, *B* и *C* треугольника *ABC* равна 180°.

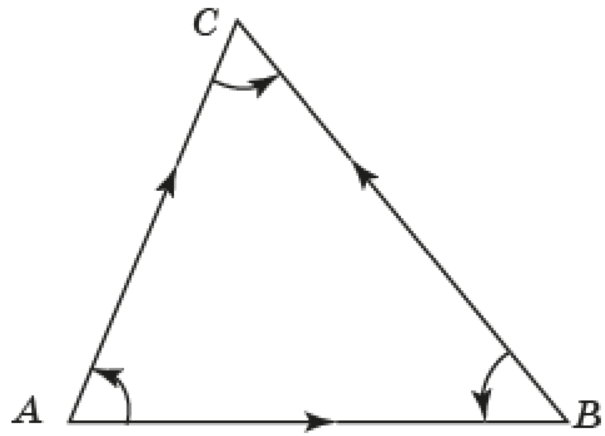


Рис. 66

Утверждение 11. Углы произвольного треугольника равны.

Доказательство. Обозначим углы A, B, C треугольника ABC соответственно α, β, γ, а стороны, лежащие против этих углов, соответственно a, b, c. На продолжении сторон BC и AC отложим соответственно отрезки $CD = b$ и $CE = a$ (рис. 70). Тогда $\angle D = \frac{\gamma}{2}$, следовательно, $\angle BAD = \alpha + \frac{\gamma}{2}$. По теореме синусов имеем: $\frac{a+b}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})} = \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}$.

Аналогично, $\angle E = \frac{\gamma}{2}$, следовательно, $\angle ABE = \beta + \frac{\gamma}{2}$. По теореме синусов имеем: $\frac{a+b}{\sin(\beta+\frac{\gamma}{2})} = \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}$.

Из этих двух равенств получаем равенство $\frac{a+b}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})} = \frac{a+b}{\sin(\beta+\frac{\gamma}{2})}$.

Следовательно, имеет место равенство $\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2}) = \sin(\beta + \frac{\gamma}{2})$, из которого следует равенство $\alpha + \frac{\gamma}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2}$, значит, имеет место равенство $\alpha = \beta$.

Аналогичным образом доказывается, что $\beta = \gamma$. Следовательно, все углы треугольника ABC равны.

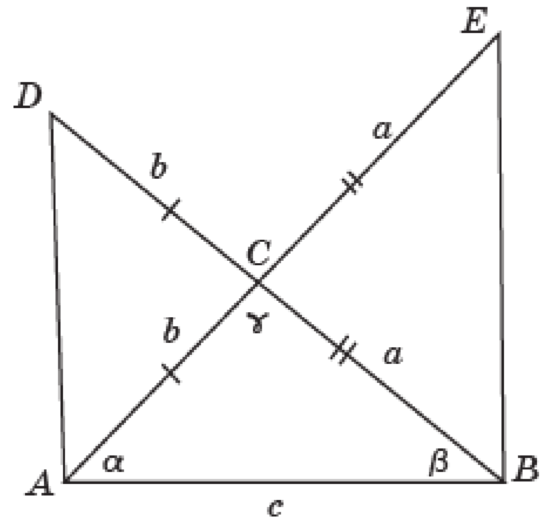


Рис. 70

Утверждение 12. 64 = 65.

Доказательство. Рассмотрим квадрат со стороной, равной 8. Разрежем его на части, как показано на рисунке 71, а. Сложим из этих частей прямоугольник (рис. 71, б). Его площадь равна 65. Следовательно, «64 = 65».

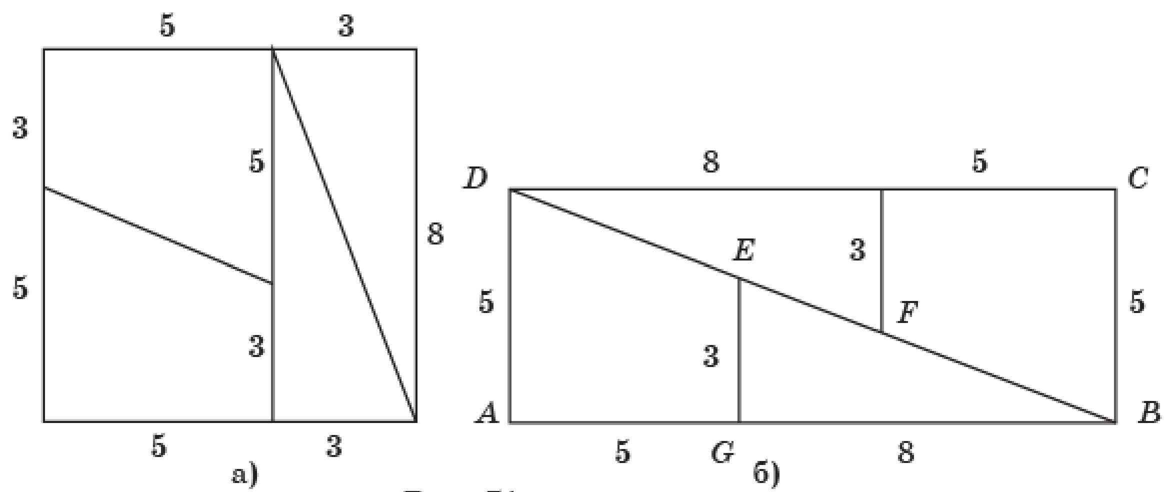


Рис. 71

Утверждение 13. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна длине его гипотенузе.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (угол C – прямой) (рис. 69). Из середины C_1 гипотенузы AB опустим перпендикуляры C_1A_1 и C_1B_1 соответственно на катеты BC и AC. Длина ломаной $AB_1C_1A_1B$ будет равна сумме длин катетов AC и BC. Из середин C_2, C_3 отрезков соответственно AC_1, C_1B опустим перпендикуляры C_2A_2, C_2B_2, C_3A_3, C_3B_3 на соответствующие катеты прямоугольных треугольников AB_1C_1, C_1A_1B. Длина ломаной $AB_2C_2A_2C_1B_3C_3A_3B$ будет равна сумме длин катетов AC и BC. Продолжая этот процесс, будем получать ломаные, приближающиеся к гипотенузе. Длины этих ломаных будут стремиться к длине гипотенузы. Так как длины этих ломаных остаются равными сумме длин катетов AC и BC, то длина гипотенуза AB будет равна сумме длин катетов AC и BC.

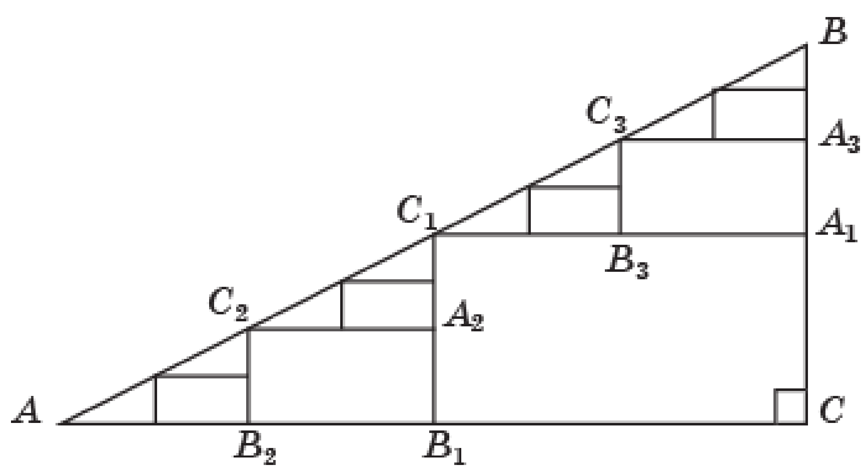


Рис. 69

Утверждение 14. Две окружности разных радиусов имеют одинаковую длину.

Доказательство. Рассмотрим две концентрические окружности (рис. 72). Предположим, что большая окружность прокатилась по прямой из положения A в положение B и сделала полный оборот. Тогда длина отрезка AB равна длине большей окружности. При этом меньшая окружность переместится из положения A_1 в положение B_1 и также сделает полный оборот. Следовательно, длина отрезка A_1B_1 равна длине меньшей окружности. Учитывая, что отрезки AB и A_1B_1 равны, получаем, что равны длины данных окружностей.

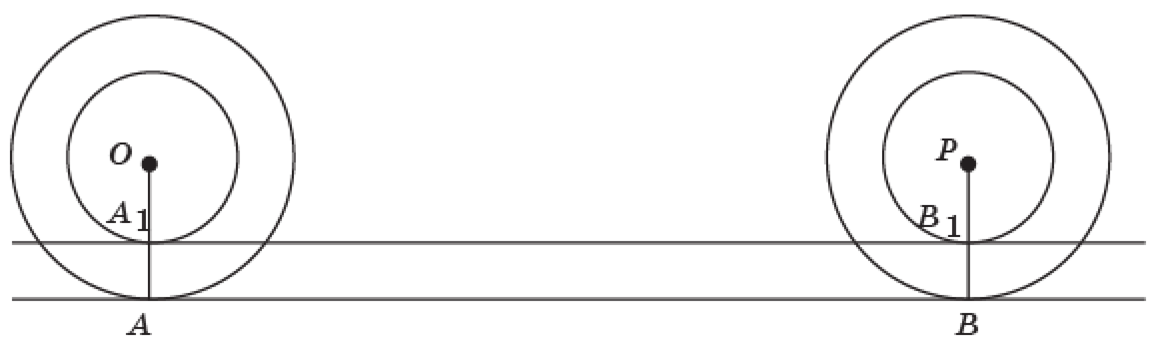


Рис. 72

Утверждение 15. Длина полуокружности равна диаметру соответствующей окружности.

Доказательство. Рассмотрим полуокружность и диаметр $AB = d$. Разобьём этот диаметр на n равных частей и построим на них, как на диаметрах, полуокружности (рис. 73).

Длина исходной полуокружности равна $\pi\frac{d}{2}$. Длины построенных полуокружностей равны $\pi\frac{d}{2n}$. Следовательно, их сумма равна $\pi\frac{d}{2}$, т. е. равна длине исходной полуокружности. При увеличении n построенные полуокружности будут приближаться к диаметру AB. Следовательно, сумма их длин должна приближаться к диаметру. Так как эта сумма постоянна и равна длине полуокружности, то она будет равна диаметру.

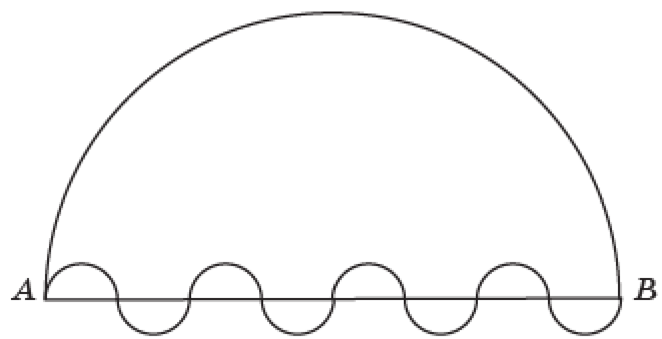


Рис. 73

5. ЗАДАЧИ С НЕОДНОЗНАЧНЫМ ОТВЕТОМ

Задача 1. Радиусы двух касающихся окружностей равны 3 и 2. Найдите расстояние между их центрами.

Решение. Возможны два случая расположения окружностей, представленные на рисунке 103. В первом случае расстояние между центрами этих окружностей равно 5, во втором равно 1.

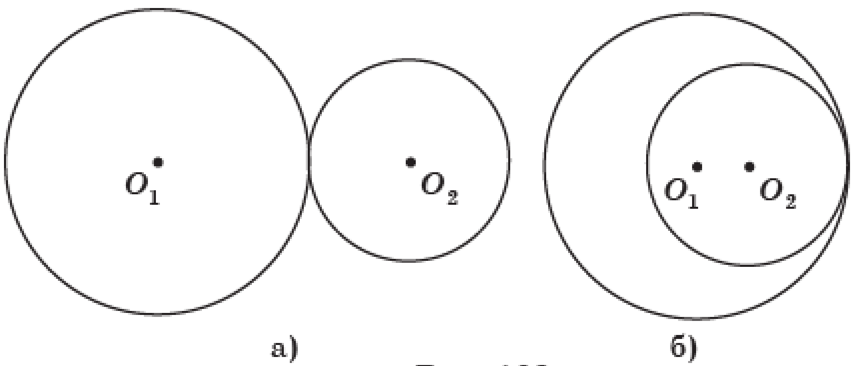


Рис. 103

Задача 2. Треугольник ABC вписан в окружность радиусом 1, сторона AB равна 1. Найдите угол C.

Решение. Для указанных в условии данных возможны два треугольника ABC и ABC_1, изображённых на рисунке 106, $\angle C = 30°$, $\angle C_1 = 150°$.

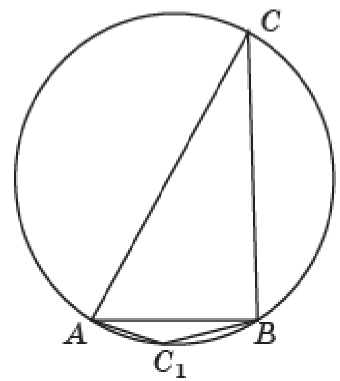


Рис. 106

Задача 3. В треугольнике ABC $AC = 5$, $BC = 4$, высота CH равна 3. Найдите сторону AB.

Решение. Для указанных в условии данных возможны два треугольника ABC и AB_1C, изображённых на рисунке 108. $AH = 4$, $BH = B_1H = \sqrt{7}$. Следовательно, $AB = 4 + \sqrt{7}$, $AB_1 = 4 - \sqrt{7}$.

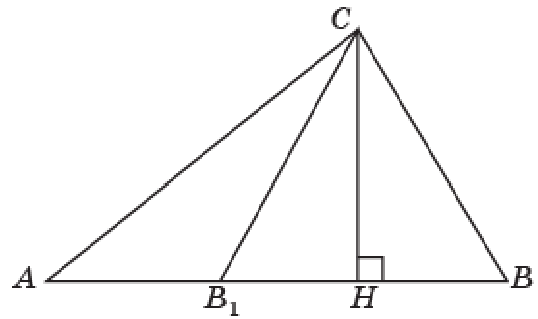


Рис. 108

Задача 4. В треугольнике ABC $AC = 10$, $\angle A = 60°$, медиана CM равна 9. Найдите сторону AB.

Решение. Для указанных в условии данных возможны два треугольника ABC и AB_1C, изображённых на рисунке 111.

Обозначим CM медиану треугольника ABC. Пусть $AM = x$. По теореме косинусов, применённой к треугольнику AMC, имеем: $81 = 100 + x^2 - 10x$.

Решая это квадратное уравнение, находим $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{6}}{2}$. Следовательно, $AB = 5 + \sqrt{6}$, $AB_1 = 5 - \sqrt{6}$.

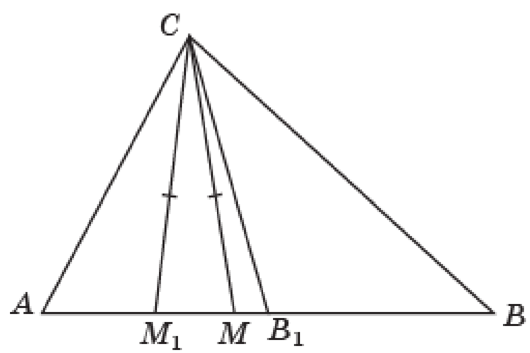


Рис. 111

Задача 5. В треугольнике ABC $AB = 6$, $AC = BC = 5$. Через середину D стороны AB проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке E и отсекающая треугольник, подобный треугольнику ABC. Найдите сторону DE отсечённого треугольника.

Решение. Имеется два отсечённых треугольника, подобных треугольнику ABC. Они показаны на рисунке 113. Для треугольника DBE_1 сторона DE_1 равна 2,5. Для треугольника E_2DB сторона E_2D равна 3.

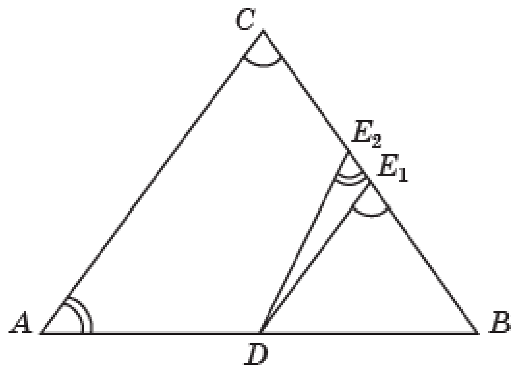


Рис. 113

Задача 6. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ равна 2. Биссектрисы углов A и B пересекают сторону CD в точках M и N. Найдите сторону AB, если отрезок MN равен 1.

Решение. Возможны два случая расположения точек M и N на стороне CD параллелограмма $ABCD$, показанные на рисунке 114. В первом случае $AB = 5$, во втором $AB = 3$.

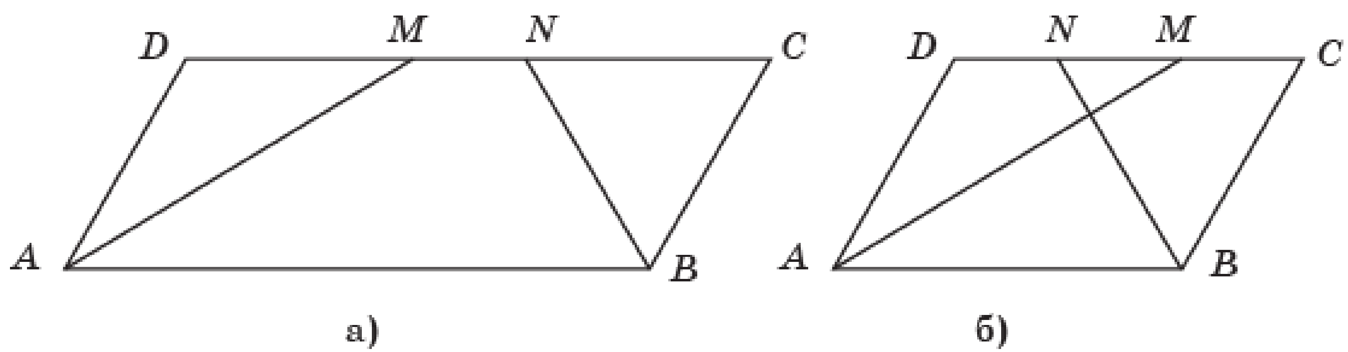


Рис. 114

Задача 7. Расстояния от точки C, расположенной внутри прямого угла, до его сторон равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, проходящей через точку C и касающейся сторон этого угла.

Решение. Возможны два случая расположения окружности, показанные на рисунке 115. В первом случае радиус окружности равен 1, во втором равен 5.

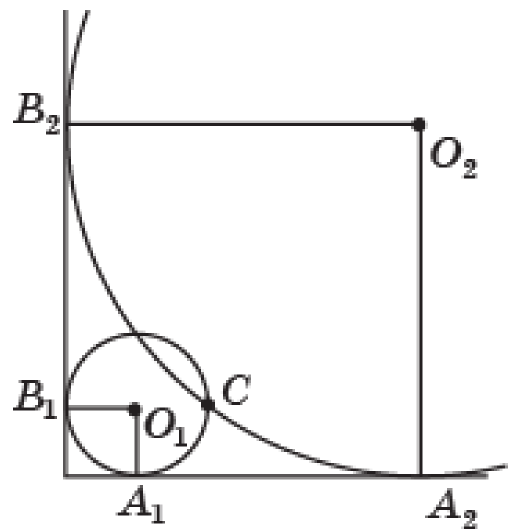


Рис. 115

Задача 8. Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиусом 25. Найдите высоту трапеции.

Решение. Пусть *ABCD* – трапеция, вписанная в окружность с центром *O* и радиусом 25. Возможны два случая: основания *AB* и *CD* трапеции расположены по одну сторону от центра *O* (рис. 116, а); основания *AB* и *CD* расположены по разные стороны от центра *O* (рис. 116, б). В первом случае через точку *O* проведём прямую, перпендикулярную *AB*, и обозначим *P*, *Q* её точки пересечения соответственно с *AB* и *CD*. Тогда высота *PQ* трапеции равна *OQ* – *OP*. Имеем *OQ* = 24, *OP* = 15. Следовательно, *PQ* = 9. Во втором случае через точку *O* проведём прямую, перпендикулярную *AB*, и обозначим *P*, *Q* её точки пересечения соответственно с *AB* и *CD*. Тогда высота *PQ* трапеции равна *OQ* + *OP*. Имеем *OQ* =24, *OP* =15. Следовательно, *PQ* = 39.

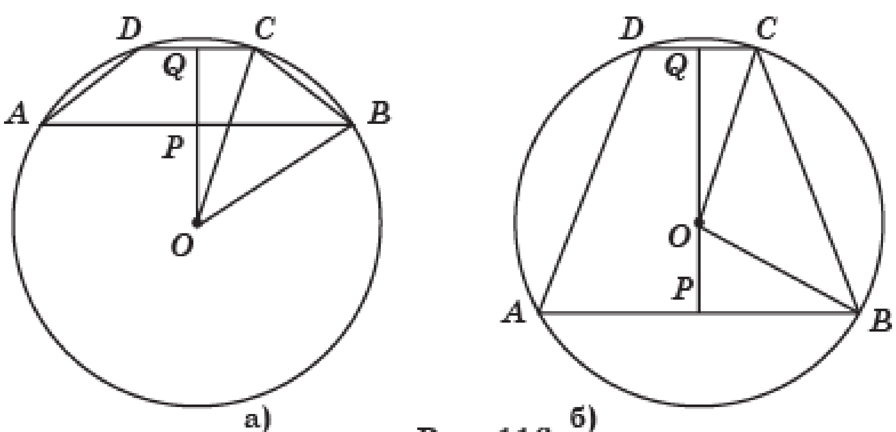


Рис. 116

Контактная информация

Издательство «Мнемозина»:
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, д. 29 Б
Тел.: 8 (499) 367–67–81
E-mail: ioc@mnemozina.ru
Сайт: mnemozina.ru

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:
E-mail: td@mnemozina.ru
Тел.: 8 (495) 644–20–26

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте **«Школа в кармане»**:
http://pocketschool.ru