издательство Мнемозина

ВЕБИНАРЫ

Задачи на комбинации многогранников

ВЕДУЩИЙ: **Смирнов Владимир Алексеевич**, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой элементарной математики МПГУ, автор учебников по геометрии для 7—9 и 10—11 классов

Авторский сайт: vasmirnov.ru

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии для 5-11 классов

Авторы:
Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.
Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

Учебно-методический комплект по геометрии

Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов

Программа и тематическое планирование по геометрии для 10-11 классов

Программа по геометрии для 5-6 классов

Дидактические материалы

Уроки геометрии с “Power Point”
5-6 классы
7-9 классы
10-11 классы

Геометрия с "GeoGebra".

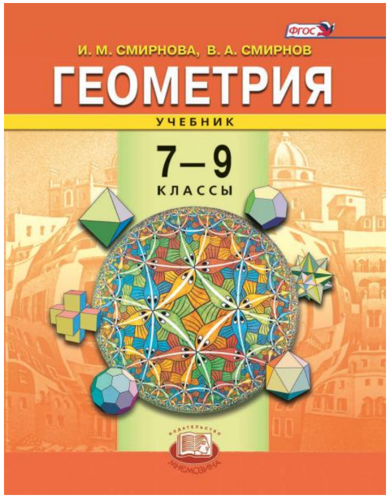
Элементарная математика для студентов педагогических вузов

Статьи о преподавании геометрии

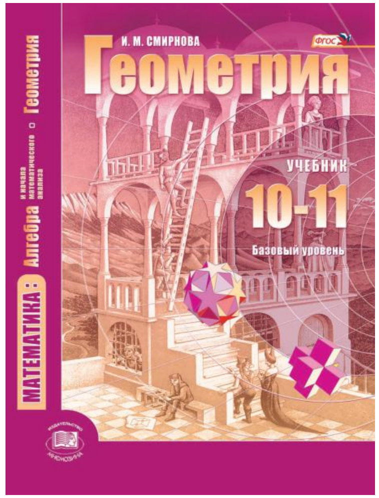
Видеолекции и вебинары　　Подготовка к ГИА　　Подготовка к ЕГЭ

Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru

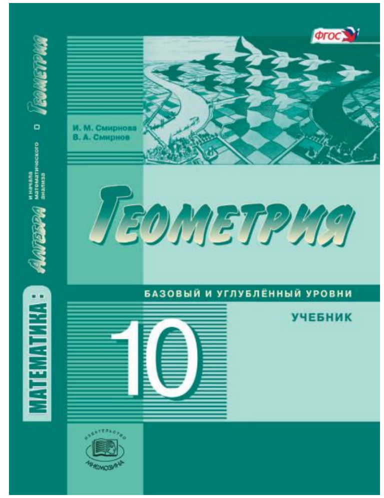
С 2003 года учебники и пособия, входящие в УМК по геометрии, выпускаются в издательстве «Мнемозина»,
учебники имеют гриф «Рекомендовано» и входят в Федеральный перечень



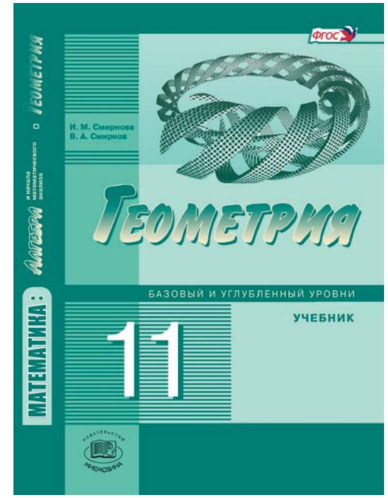
ФПУ № 1.2.4.3.8.1



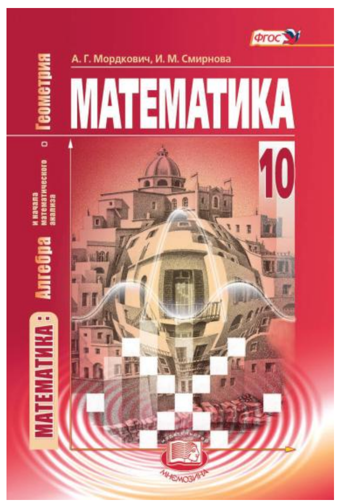
ФПУ № 1.3.4.1.14.1

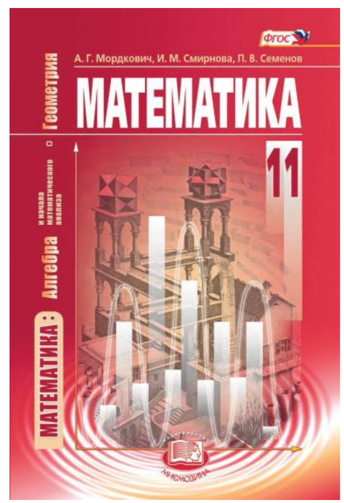


ФПУ № 1.3.4.1.15.1

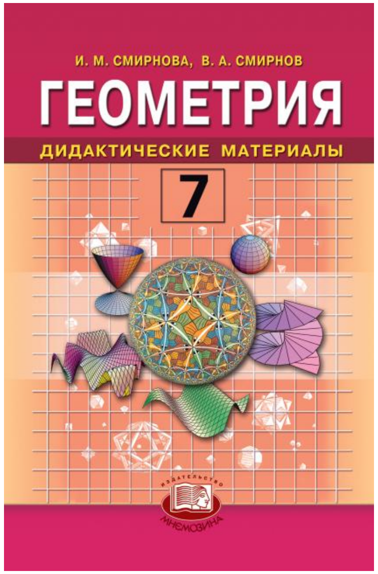


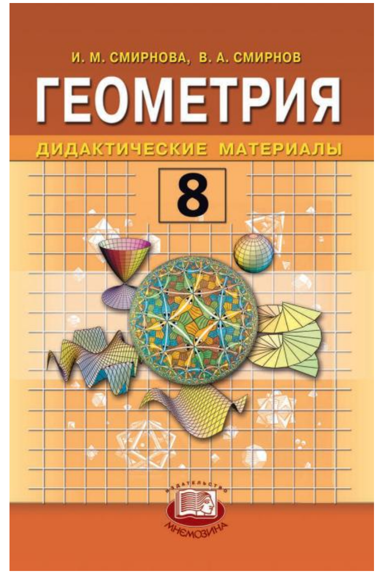
ФПУ № 1.3.4.1.15.2

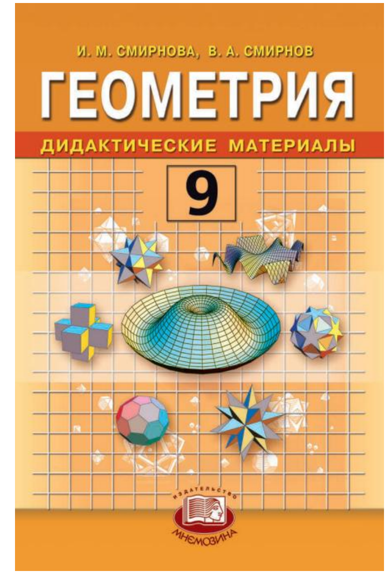


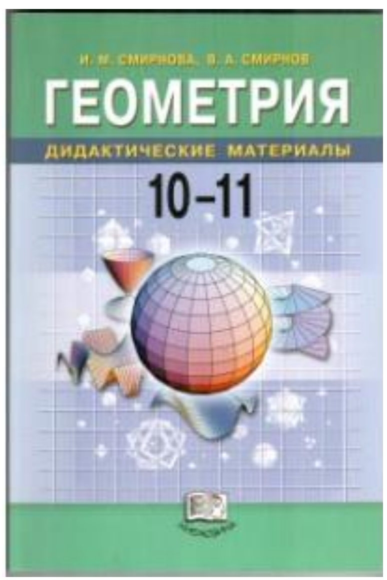


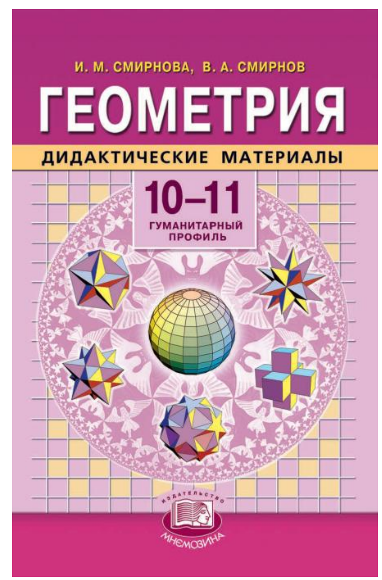
Дидактические материалы



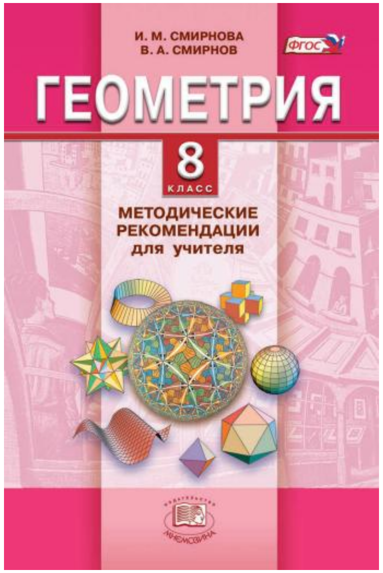


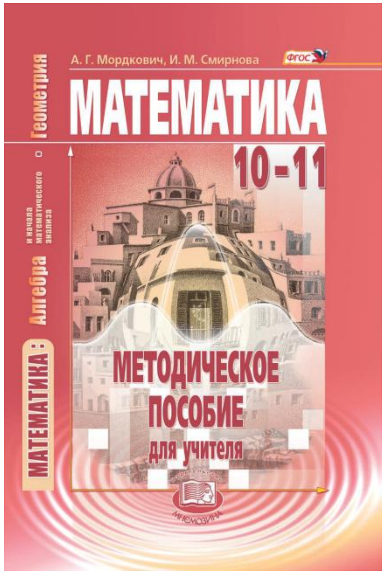






Методические рекомендации

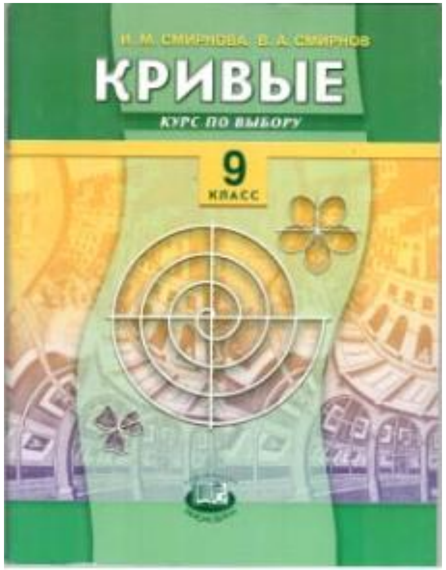


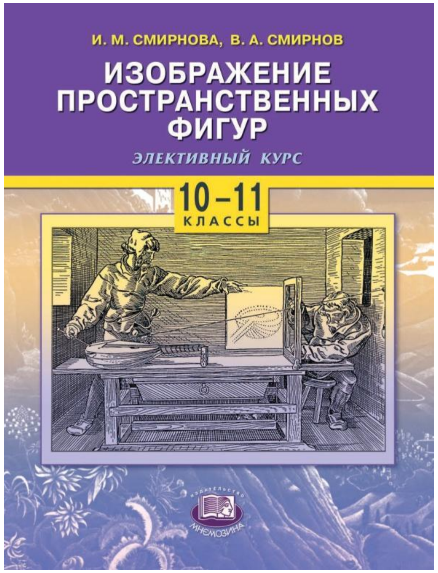


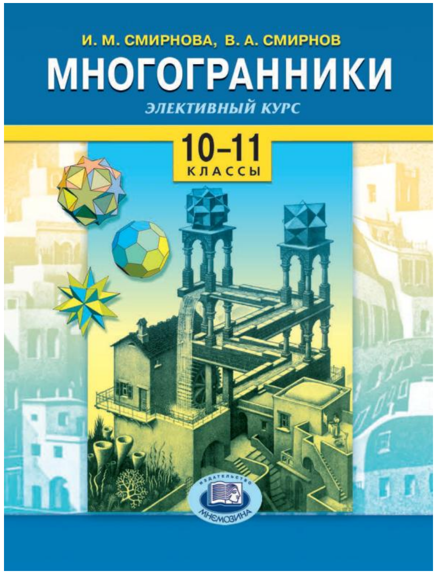
Рабочие тетради для 7–9 и 10–11 классов

Дополнительные сборники задач

Курсы по выбору и элективные курсы







Задачи на комбинации многогранников

Задачи на комбинации многогранников являются одними из наиболее трудных стереометрических задач. Это связано с тем, что для их решения требуются развитые пространственные представления, умения изображать различные многогранники и их комбинации.

Кроме того, плоские изображения многогранников не всегда помогают представить сами фигуры и их комбинации.

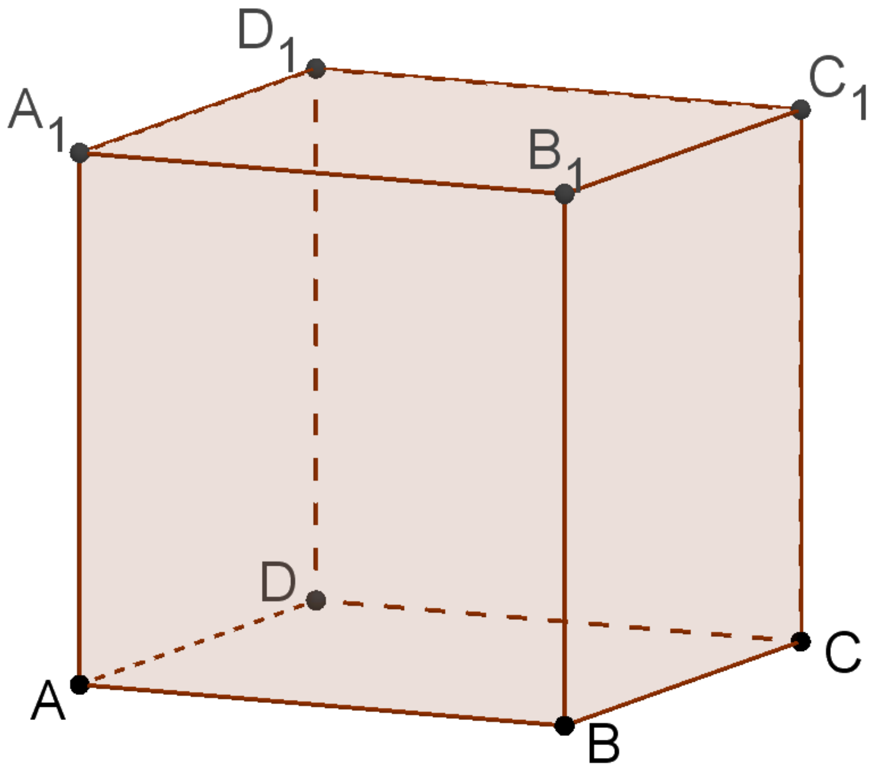
Компьютерная программа GeoGebra позволяет создавать трёхмерные модели пространственных фигур, производить над ними различные действия, что помогает решать сложные стереометрические задачи и способствует развитию пространственных представлений учащихся.

Здесь мы рассмотрим задачи на комбинации многогранников, для решения которых можно использовать свободно распространяемую компьютерную программу GeoGebra. Она позволяет создавать модели многогранников и их комбинации, что помогает представить пространственную ситуацию, описанную в задаче, и найти решение.

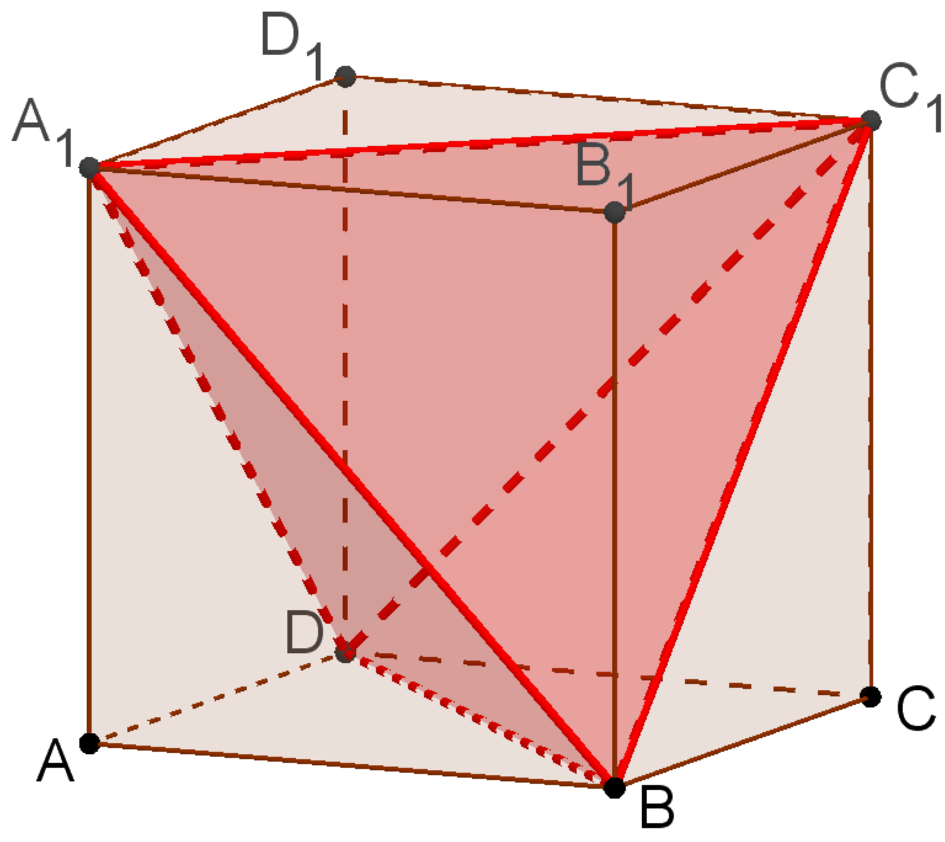
Задачи базового уровня трудности помечены буквой «B», задачи повышенного уровня трудности – буквой «C», олимпиадного уровня – буквой «D».

Более подробно с многогранниками и возможностями их моделирования в программе GeoGebra можно познакомиться на сайте vasmirnov.ru.

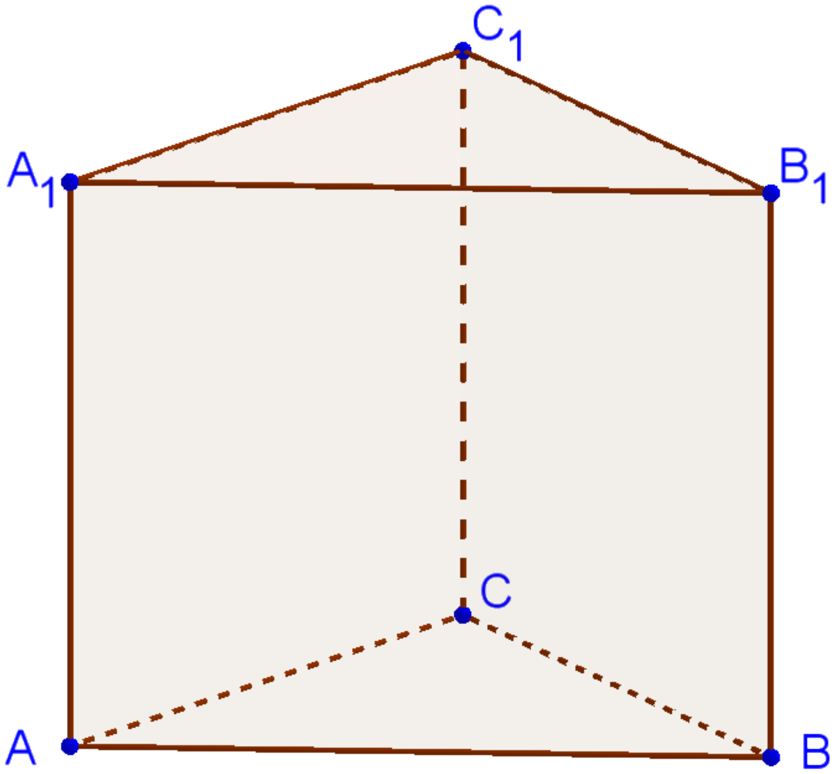
(B) Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины B, D, A_1, C_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как он называется? Найдите его рёбра.



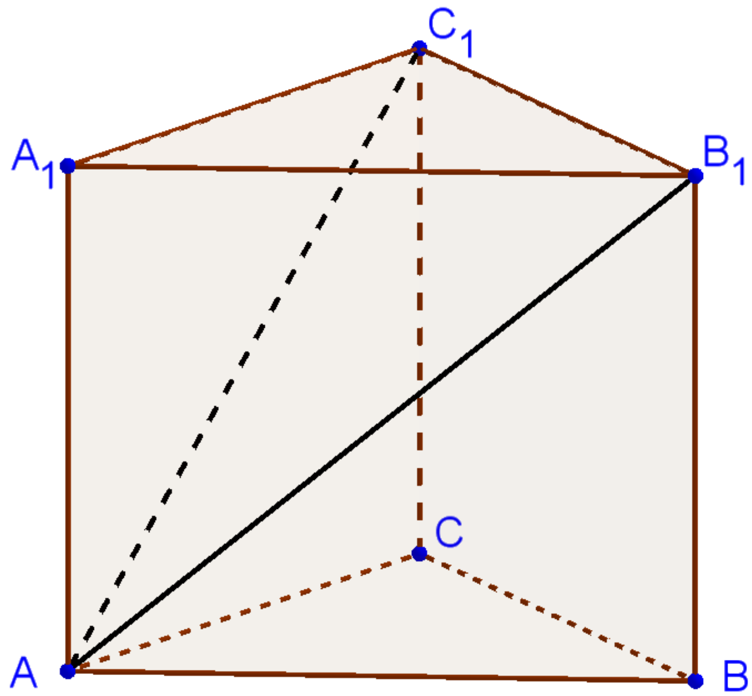
Решение. Искомым многогранником является правильный тетраэдр. Его рёбра равны $\sqrt{2}$.



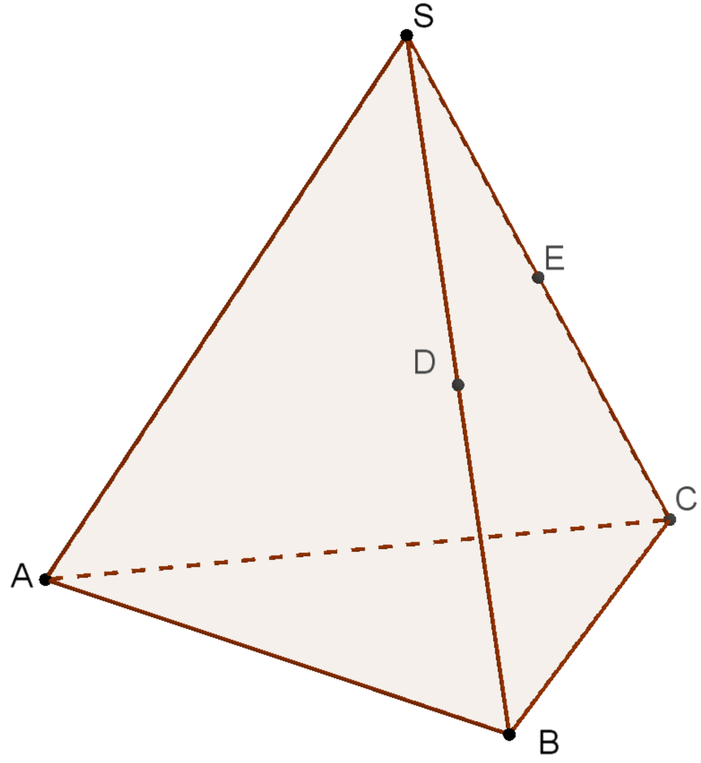
(В) Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины A, B, C, C_1, B_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Найдите его объём, если объём исходной призмы равен 1.



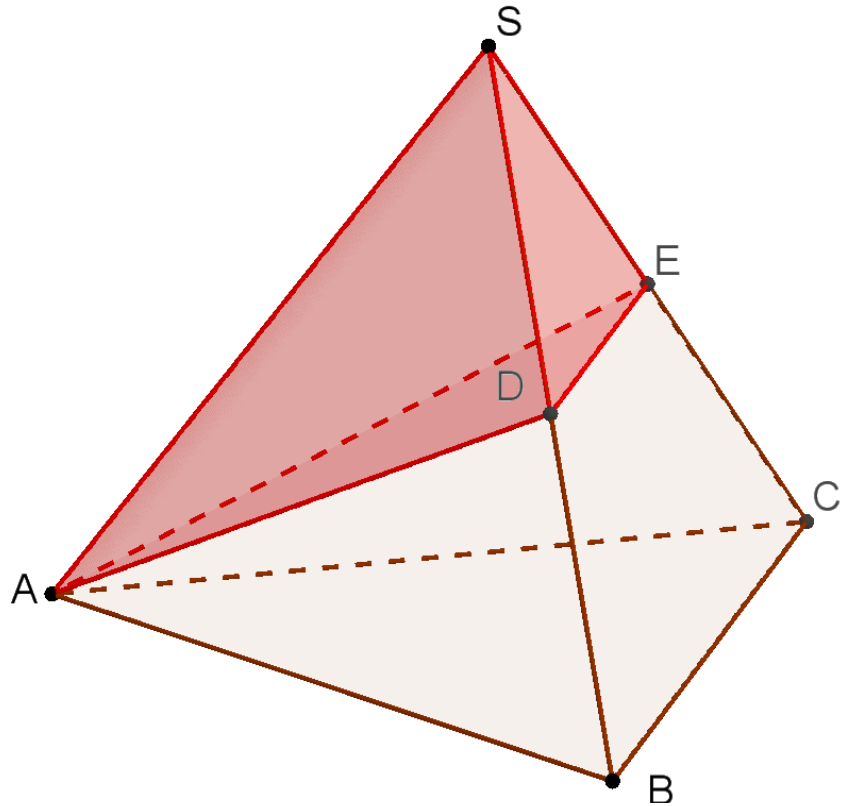
Ответ. Искомым многогранником является четырёхугольная пирамида $ABCC_1B_1$. Её объём равен $\frac{2}{3}$.



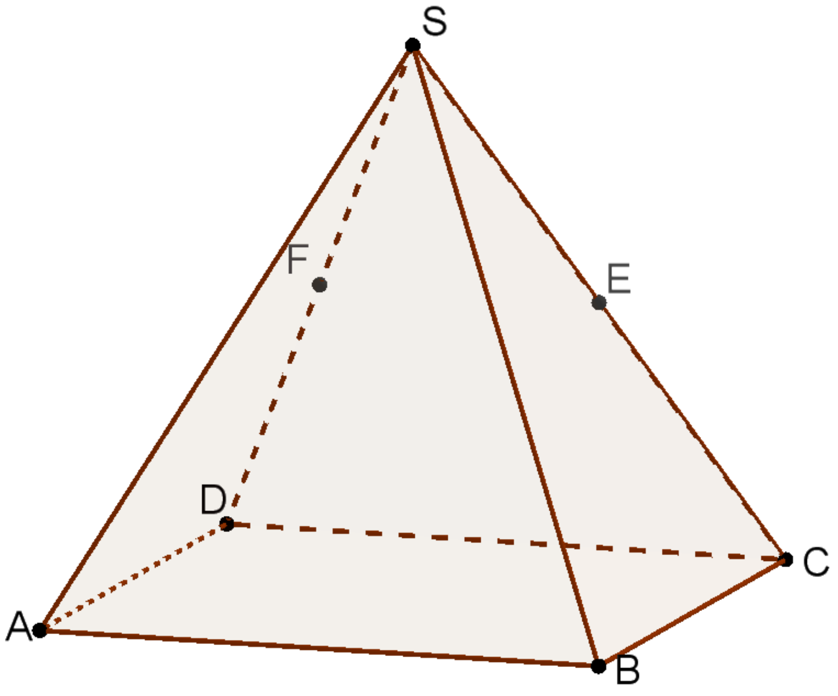
(В) Объем треугольной пирамиды $SABC$ равен 1, D – середина ребра SB, E – середина ребра SC. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, D, E, S.



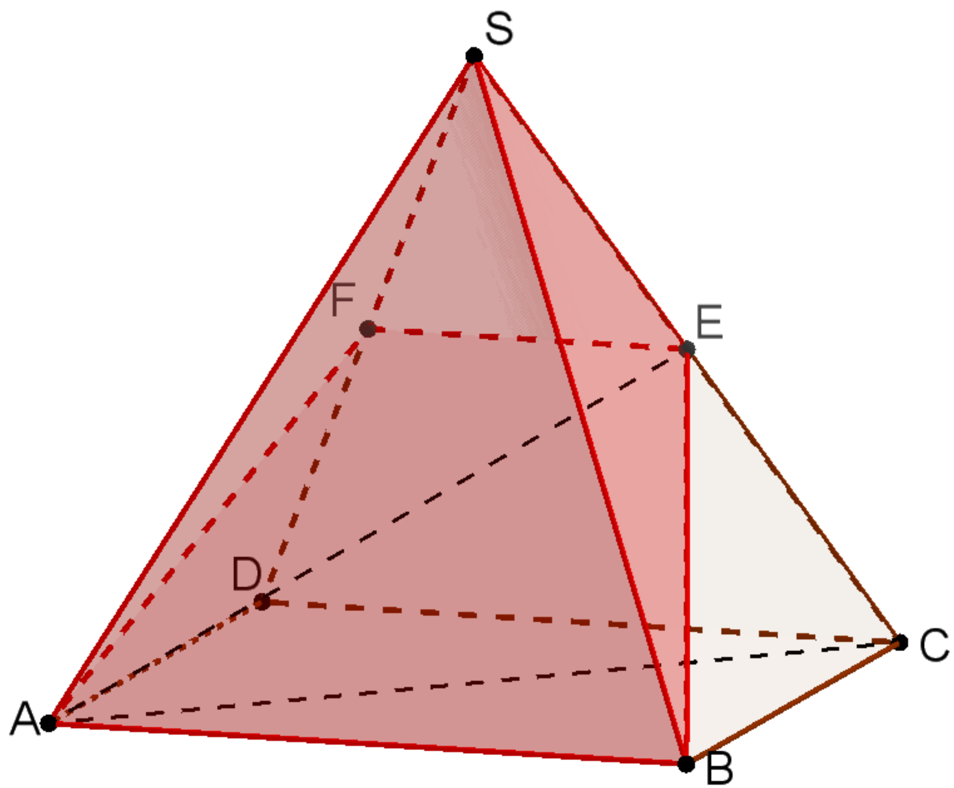
Ответ. $\frac{1}{4}$.



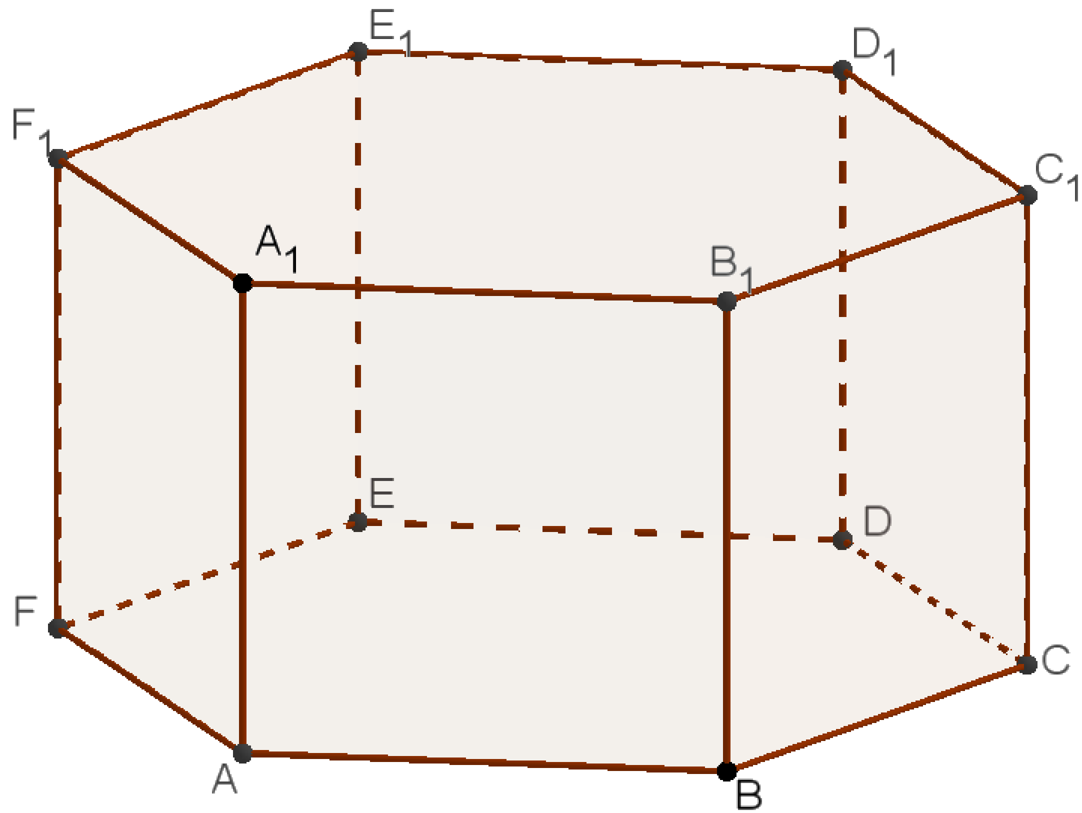
(C) Объем четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 1, E – середина ребра SC, F – середина ребра SD. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, E, F, S.



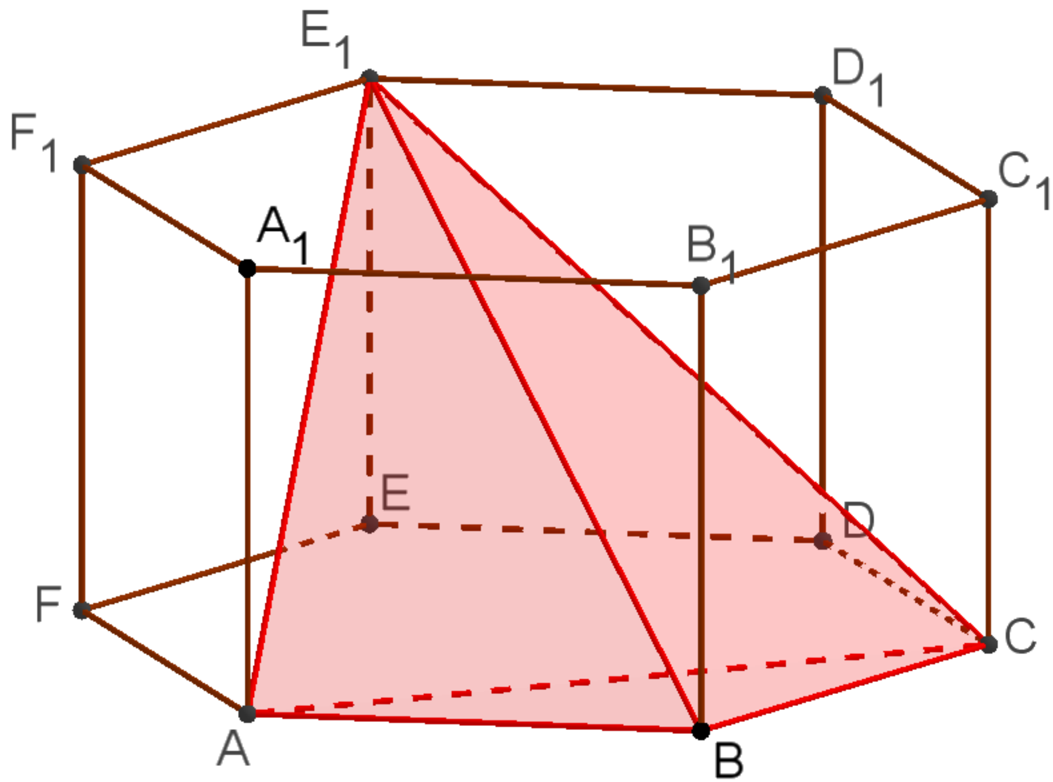
Решение. Искомым многогранником является четырёхугольная пирамида $SABEF$. Она состоит из двух треугольных пирамид $SABE$ и $SAEF$. Объем пирамиды $SABE$ равен $\frac{1}{4}$. Объём пирамиды $SAEF$ равен $\frac{1}{8}$. Следовательно, объём пирамиды $SABEF$ равен $\frac{3}{8}$.



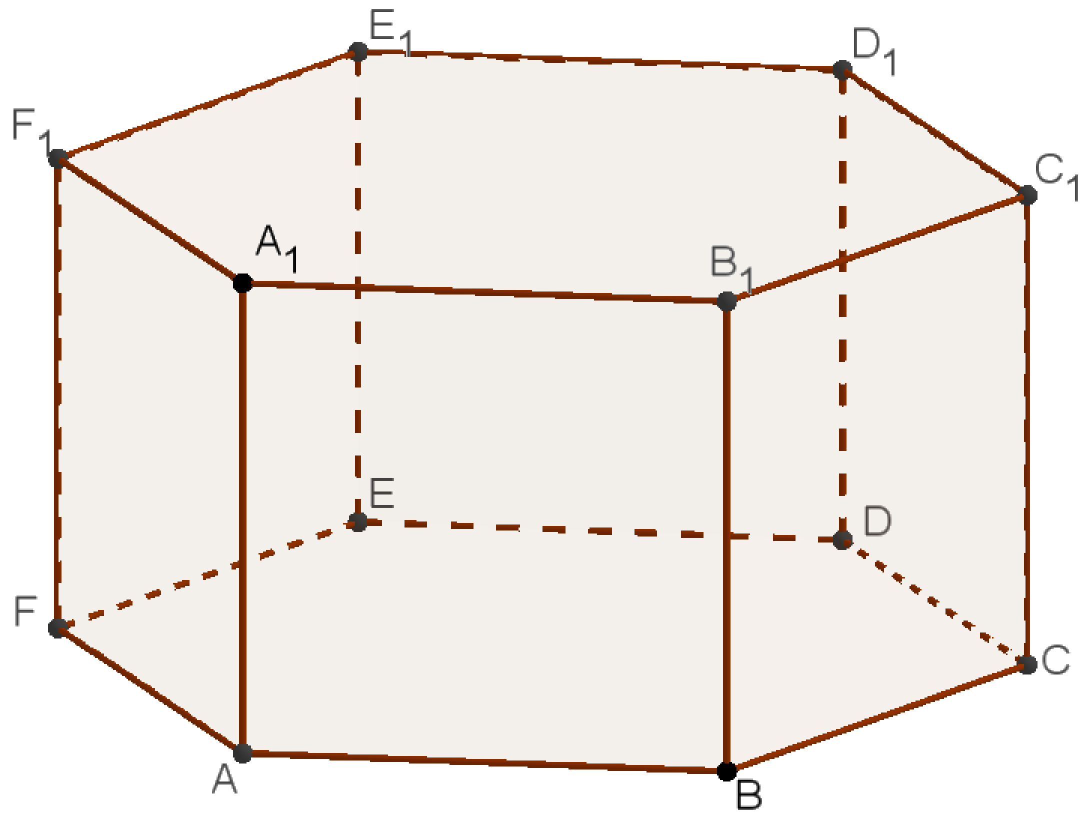
(В) Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины A, B, C, E_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Найдите его объём, если объём исходной призмы равен 1.



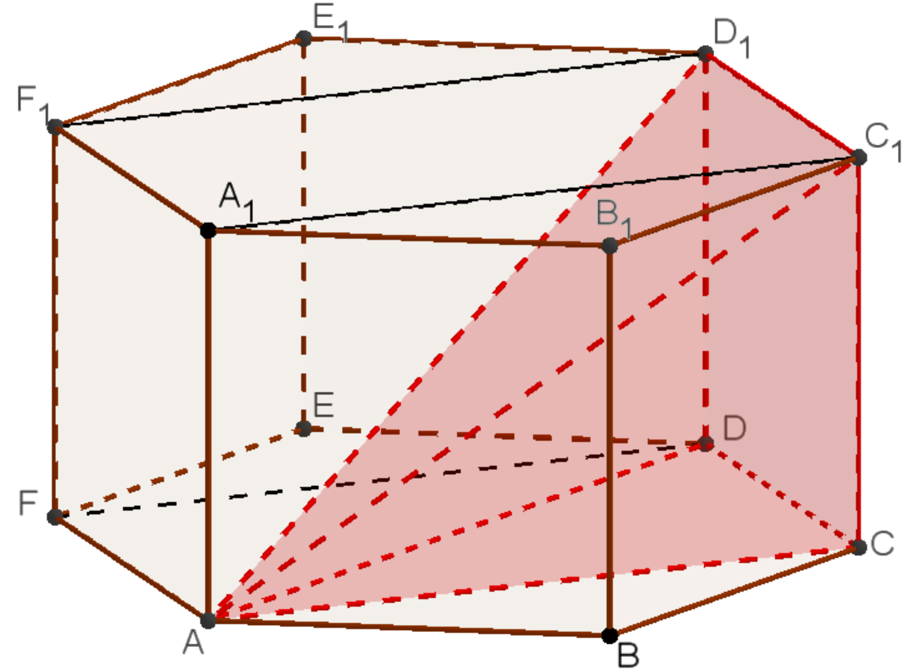
Ответ. Искомым многогранником является треугольная пирамида E_1ABC. Её объём равен $\frac{1}{18}$.



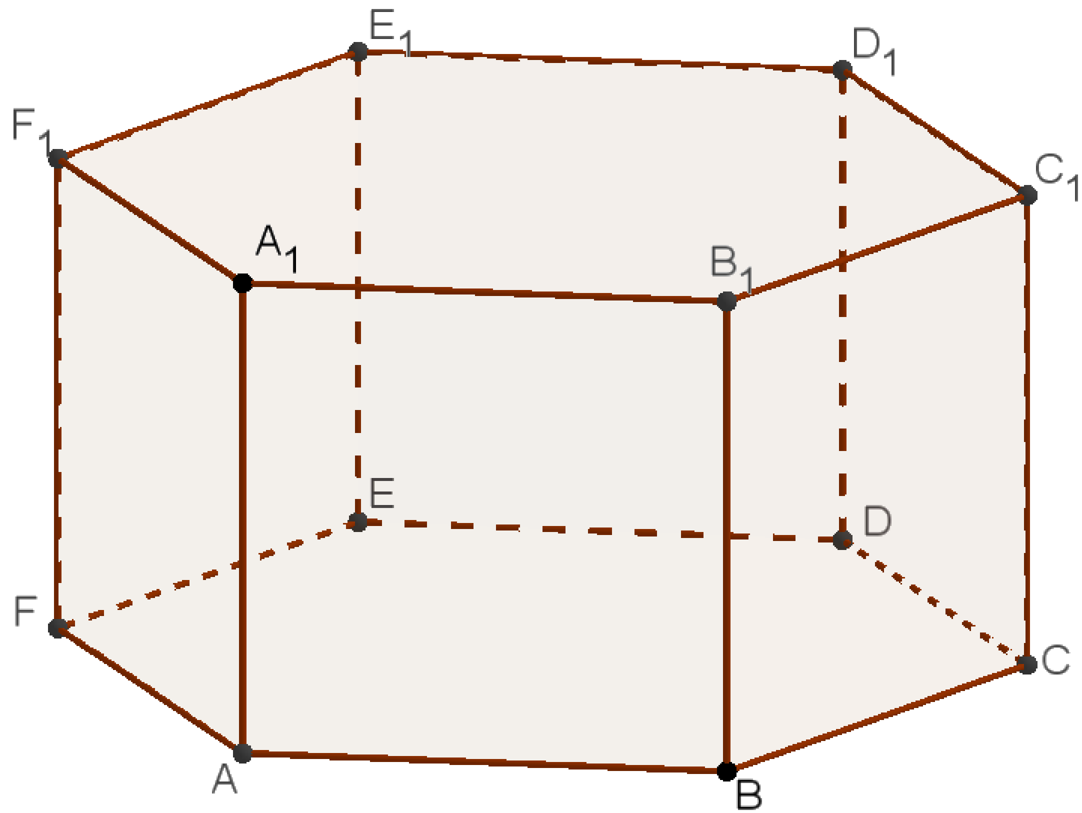
(В) Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины A, C, D, C_1, D_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Найдите его объём, если объём исходной призмы равен 1.



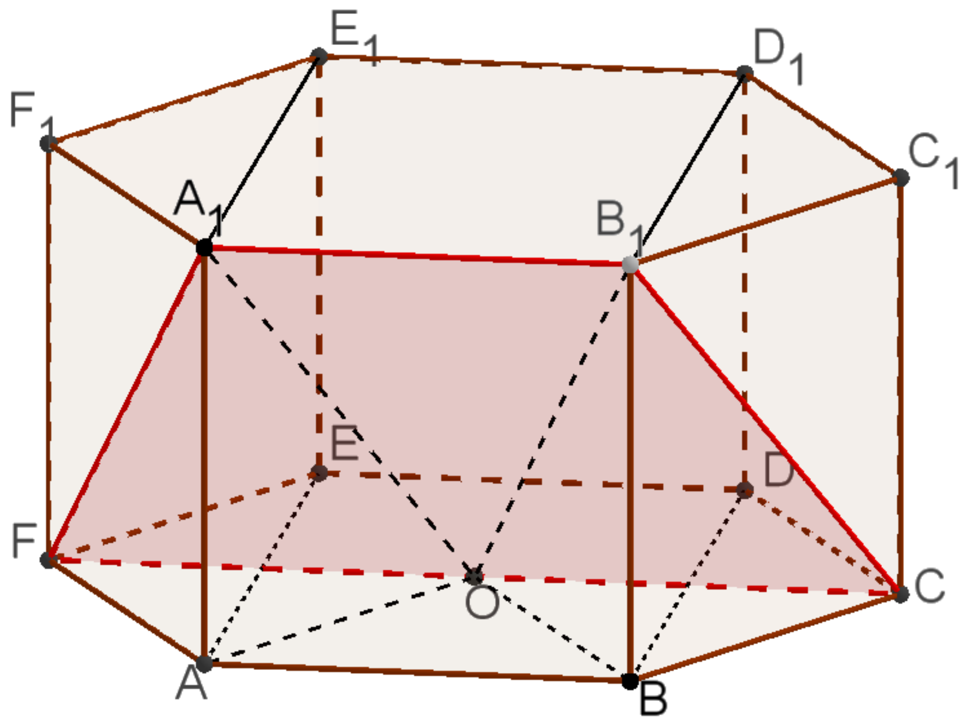
Ответ. Искомым многогранником является четырёхугольная пирамида $ACDD_1C_1$. Её объём равен $\frac{2}{9}$.



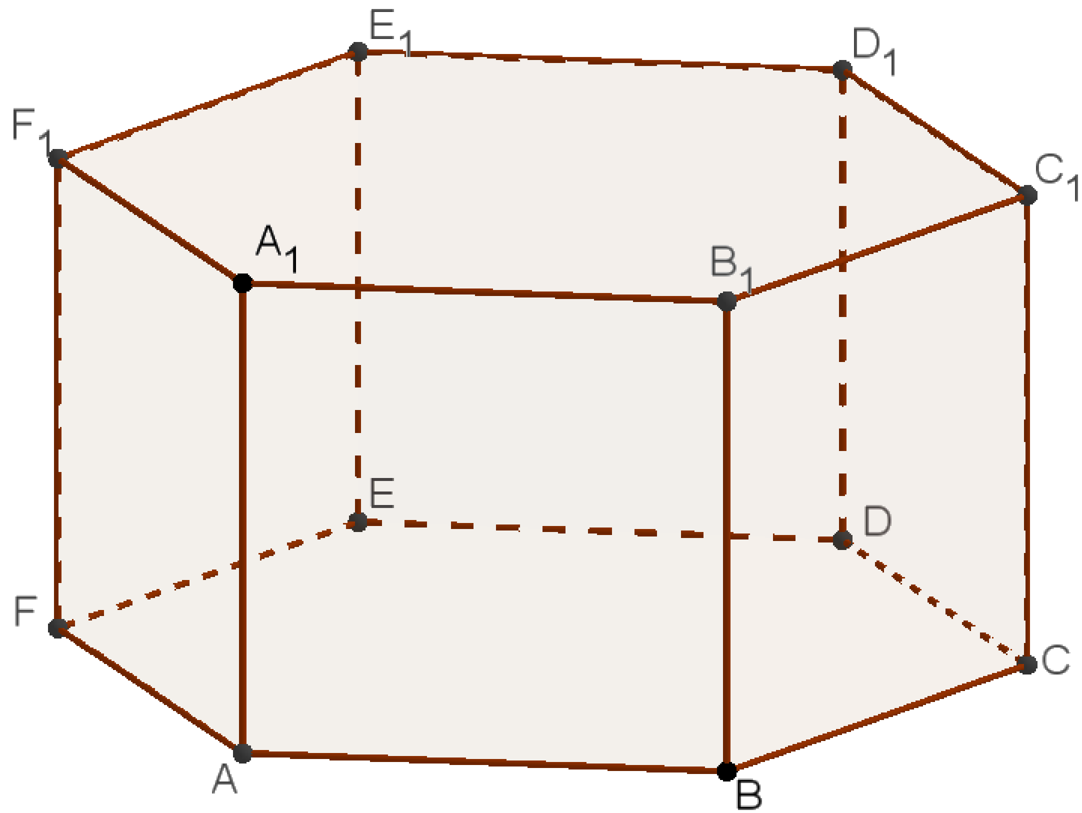
(C) Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины A, B, C, F, A_1, B_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Найдите его объём, если объём исходной призмы равен 1.



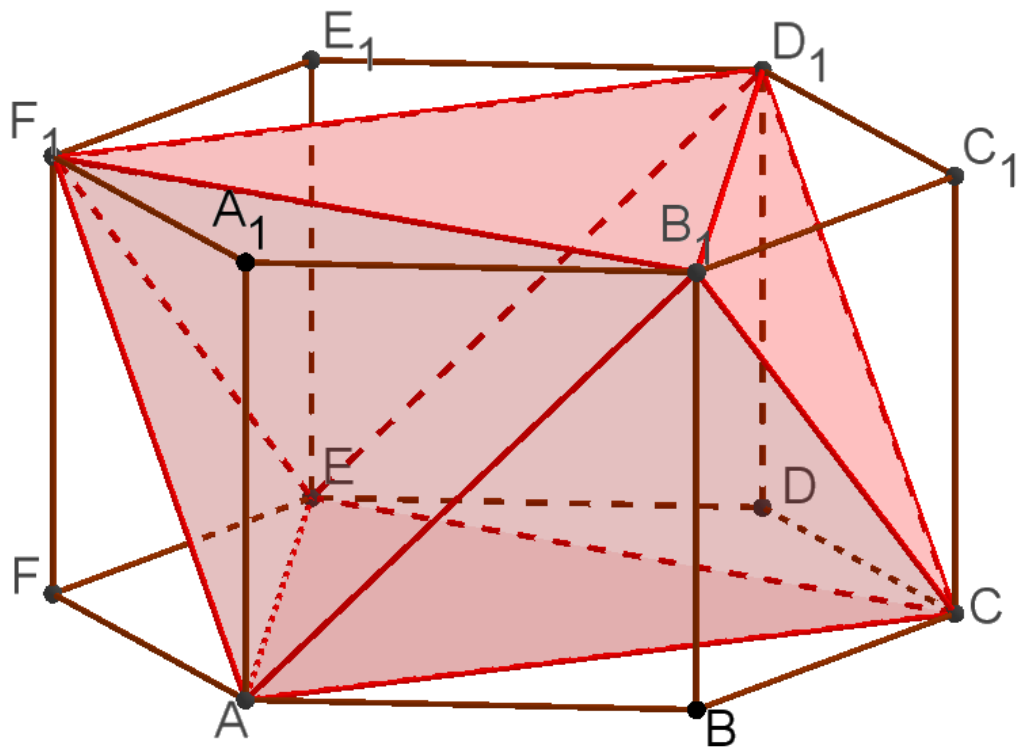
Решение. Искомый многогранник состоит из двух треугольных пирамид A_1AOF, B_1BOC, объёмы которых равны $\frac{1}{18}$, и четырёхугольной пирамиды $OABB_1A_1$, объём которой равен $\frac{2}{18}$. Следовательно, объём искомого многогранника равен $\frac{2}{9}$.



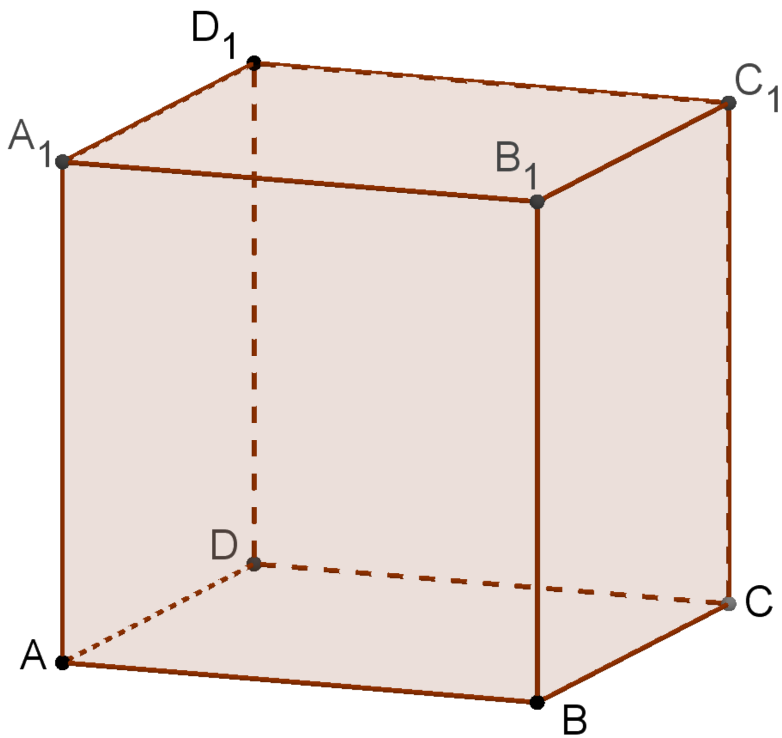
(В) Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины A, C, E, B_1, D_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Найдите его объём, если объём исходной призмы равен 1.



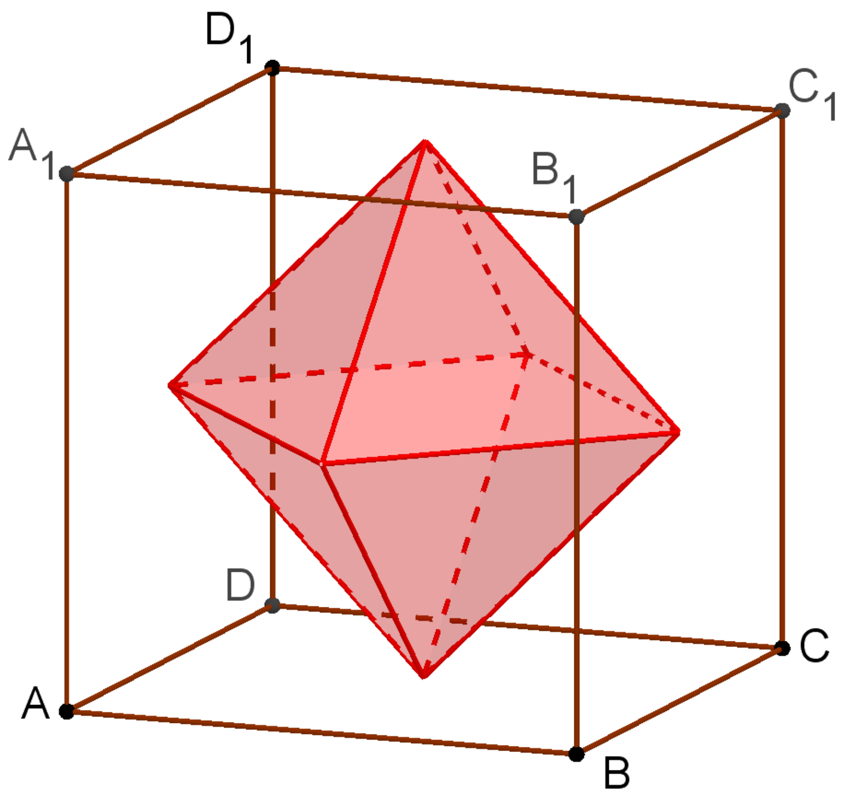
Решение. Искомый многогранник состоит из двух четырёхугольных пирамид с основанием ACD_1F_1 и вершинами соответственно B_1 и E. Он получается из данной призмы отсечением шести равных треугольных пирамид, объёмы которых равны $\frac{1}{18}$. Следовательно, объём искомого многогранника равен $\frac{1}{2}$.



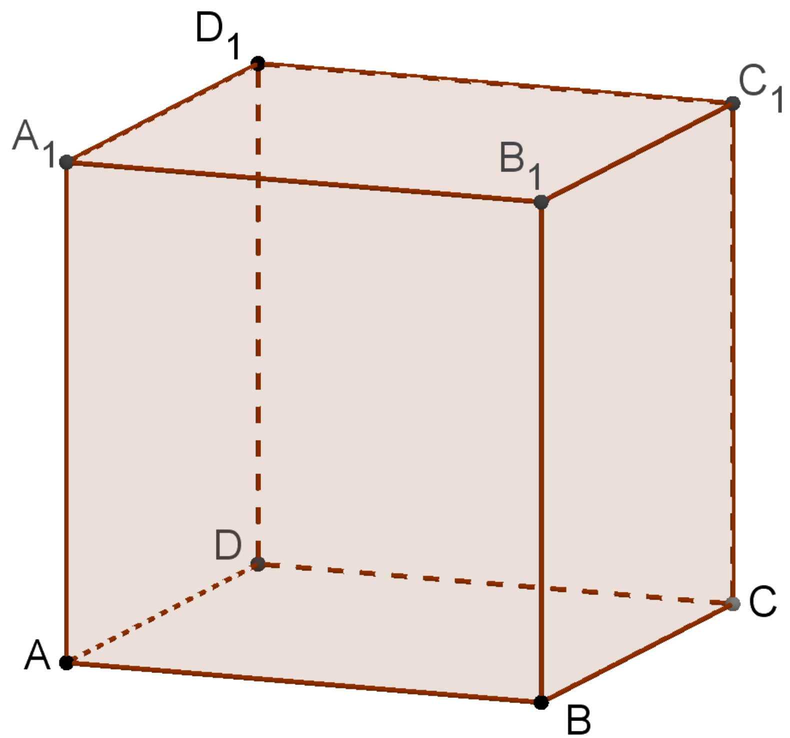
(B) Изобразите многогранник, вершинами которого являются центры граней единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как он называется? Найдите его рёбра.



Решение. Искомым многогранником является октаэдр. Его рёбра равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



(B) Изобразите многогранник, вершинами которого являются середины рёбер единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Как он называется? Найдите его рёбра.



Решение. Искомый многогранник называется кубооктаэдр, он изображён на рисунке 78. Его гранями являются восемь правильных треугольников и шесть квадратов. Его рёбра равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

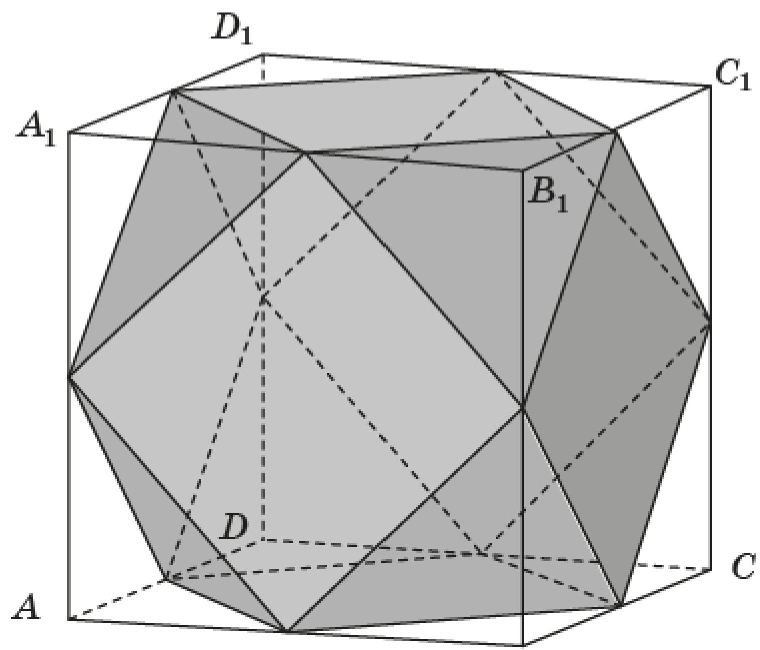


Рис. 78

(В) Изобразите многогранник, вершинами которого являются середины рёбер единичного тетраэдра *ABCD* (рис. 4). Как он называется? Найдите его объём.

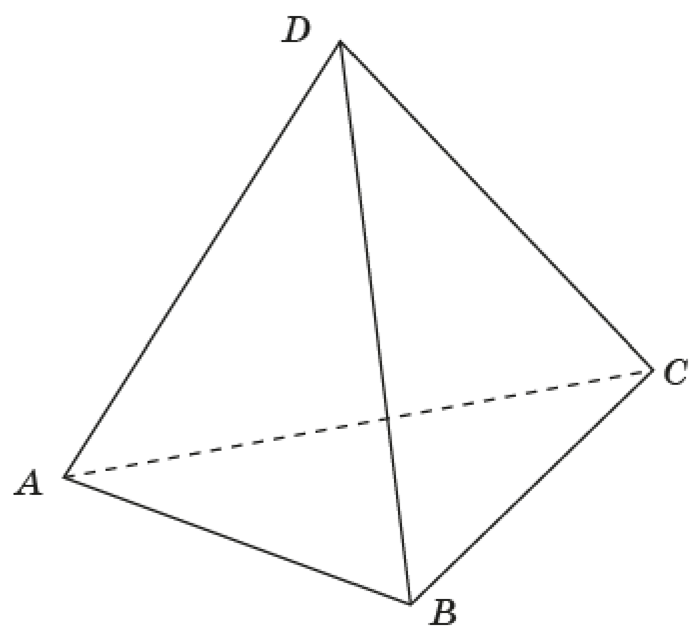


Рис. 4

Решение. Искомым многогранником является октаэдр (рис. 80). Его объём равен $\frac{1}{2}$.

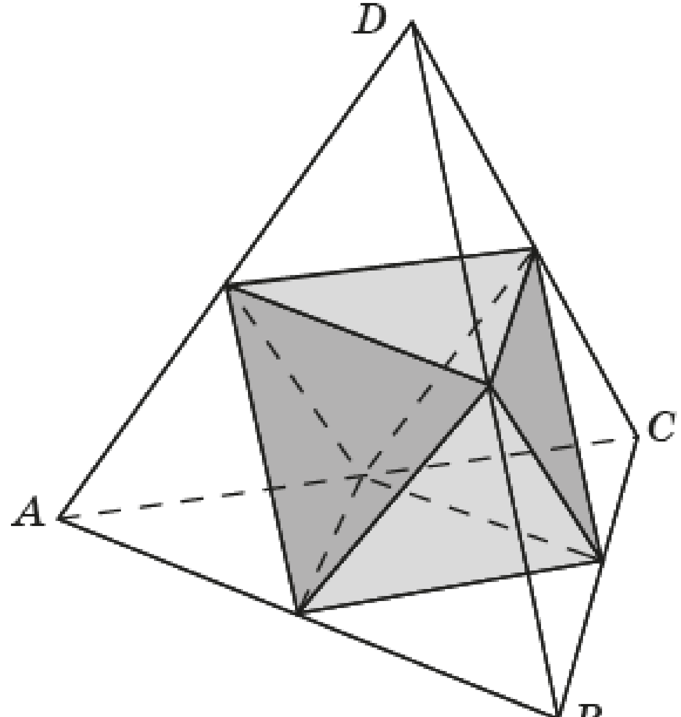


Рис. 80

(C) Изобразите многогранник, вершинами которого являются центры граней единичного тетраэдра $ABCD$ (рис. 4). Как он называется? Найдите его рёбра.

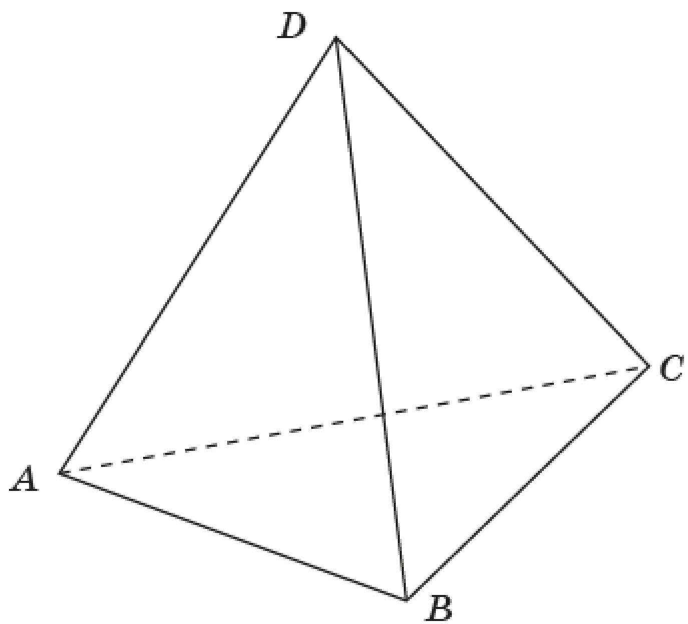


Рис. 4

Решение. Искомым многогранником является правильный тетраэдр $EFGH$ (рис. 79). Его ребро EF равно $\frac{2}{3}$ средней линии PQ треугольника ABC. Следовательно, рёбра тетраэдра $EFGH$ равны $\frac{1}{3}$.

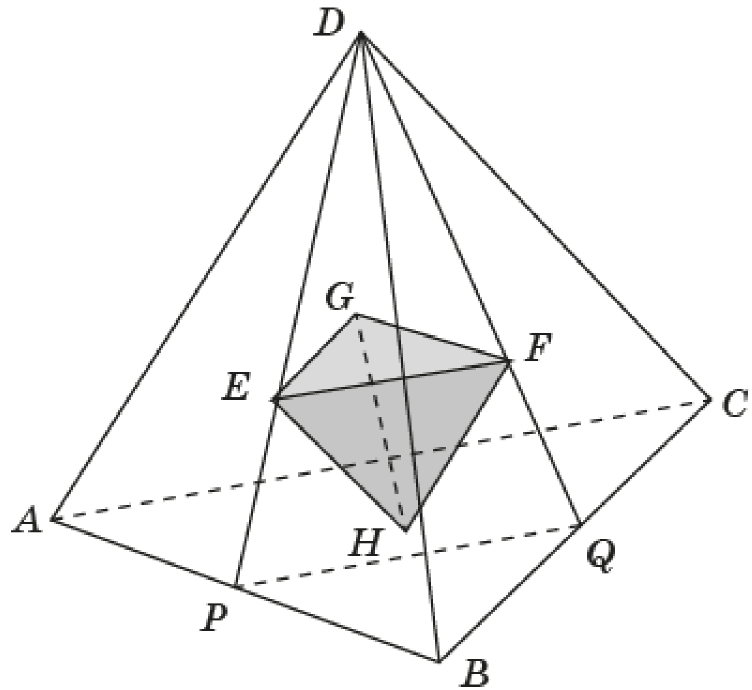


Рис. 79

(C) Изобразите многогранник, вершинами которого являются центры граней единичного октаэдра (рис. 6). Как он называется? Найдите его рёбра.

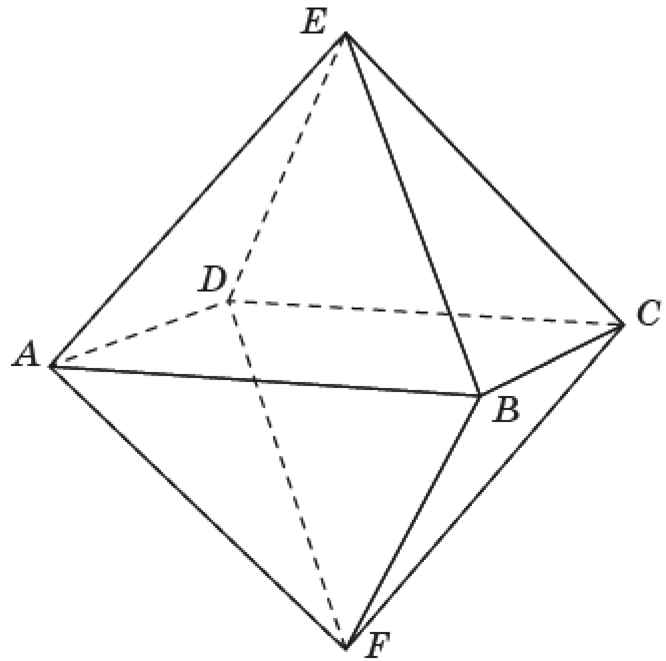


Рис. 6

Решение. Искомым многогранником является куб (рис. 81). Его ребро EF равно $\frac{1}{3}$ диагонали октаэдра. Следовательно, рёбра куба равны $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

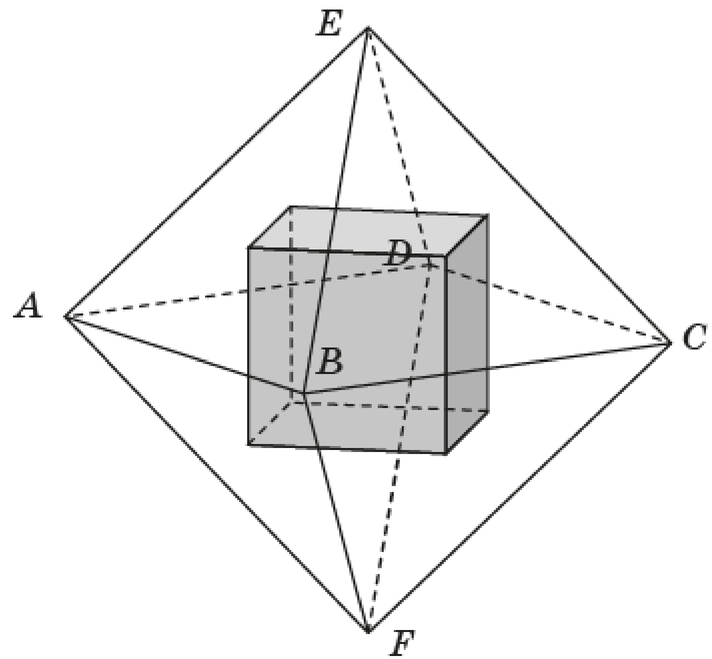


Рис. 81

(В) Изобразите многогранник, вершинами которого являются середины рёбер единичного октаэдра (рис. 6). Как он называется? Найдите его рёбра.

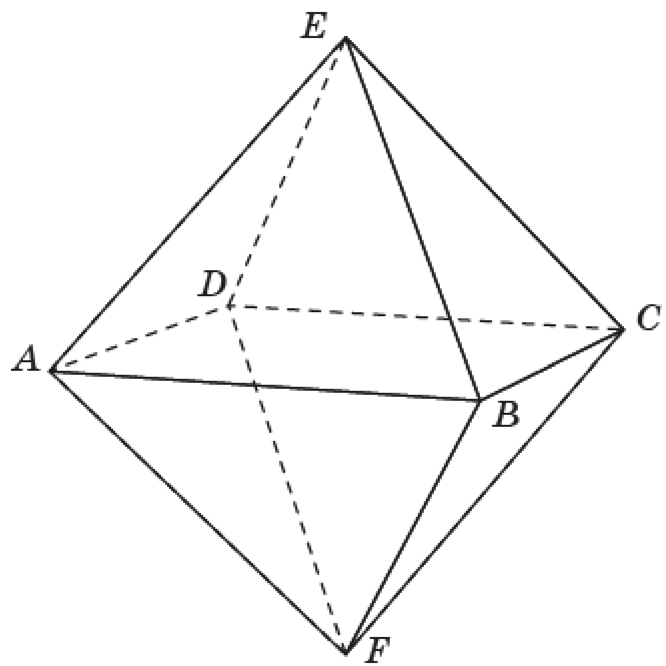


Рис. 6

Решение. Искомый многогранник называется кубооктаэдр, он изображён на рисунке 82. Он аналогичен многограннику, изображённому на рисунке 3. Его гранями являются восемь правильных треугольников и шесть квадратов. Его рёбра равны $\frac{1}{2}$.

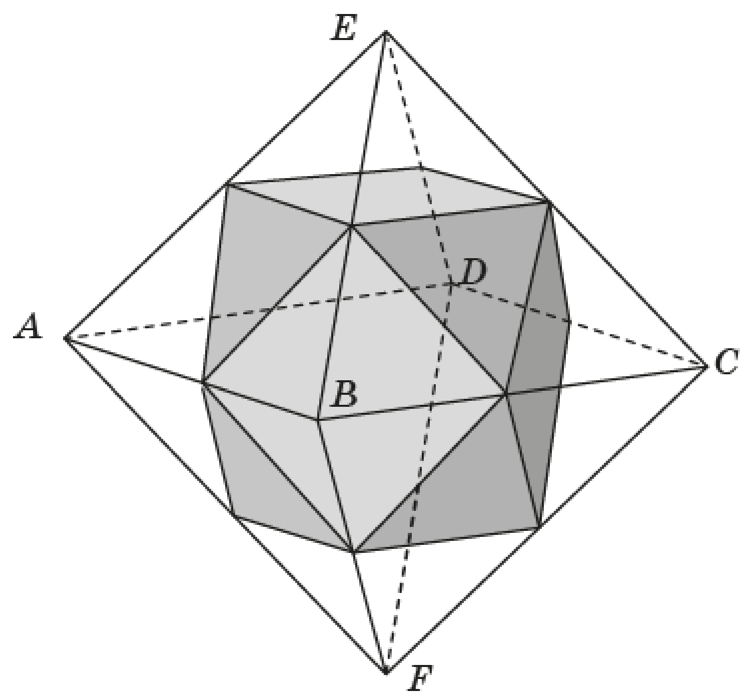


Рис. 82

(C) Изобразите многогранник, вершинами которого являются центры граней единичного икосаэдра (рис. 8). Как он называется? Найдите его рёбра.

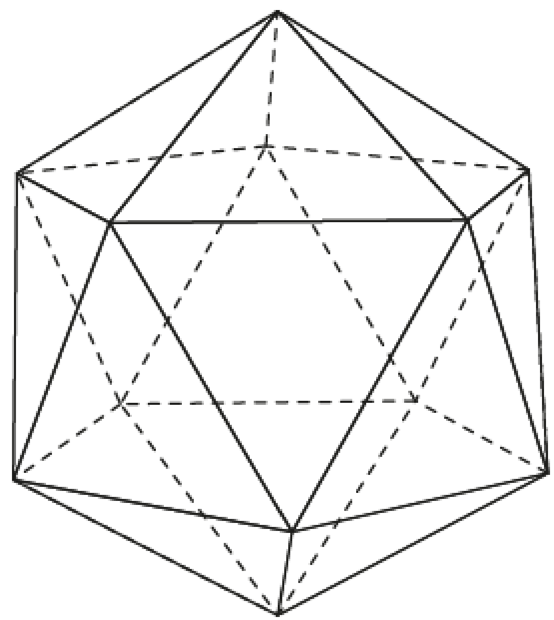


Рис. 8

Решение. Искомым многогранником является додекаэдр (рис. 83). Его ребро равно $\frac{1+\sqrt{5}}{6}$.

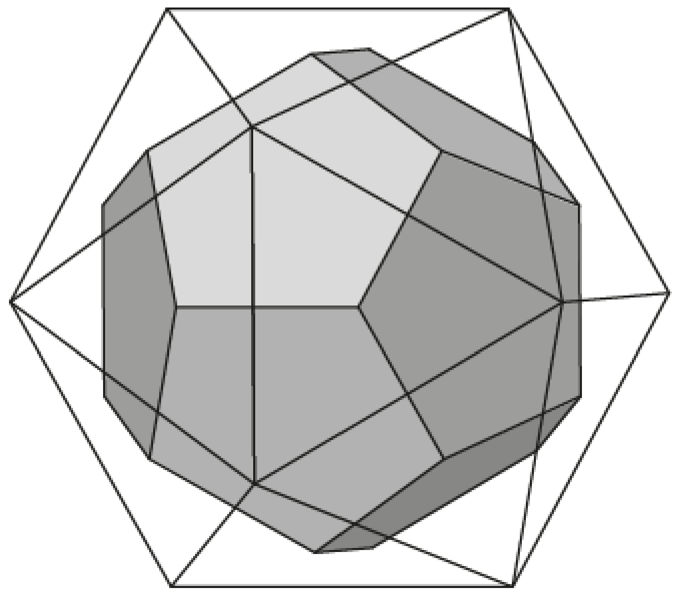


Рис. 83

(В) Изобразите многогранник, вершинами которого являются середины рёбер единичного икосаэдра (рис. 8). Как он называется? Найдите его рёбра.

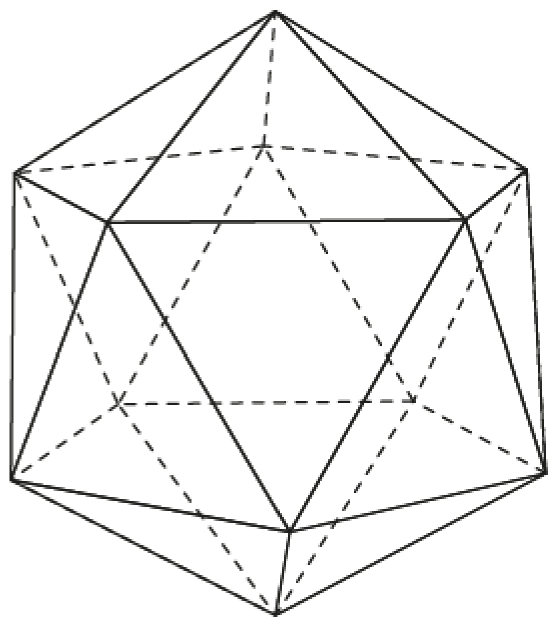


Рис. 8

Решение. Искомый многогранник называется икосододэкаэдр, он изображён на рисунке 84. Его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников и двадцать правильных треугольников. Его рёбра равны $\frac{1}{2}$.

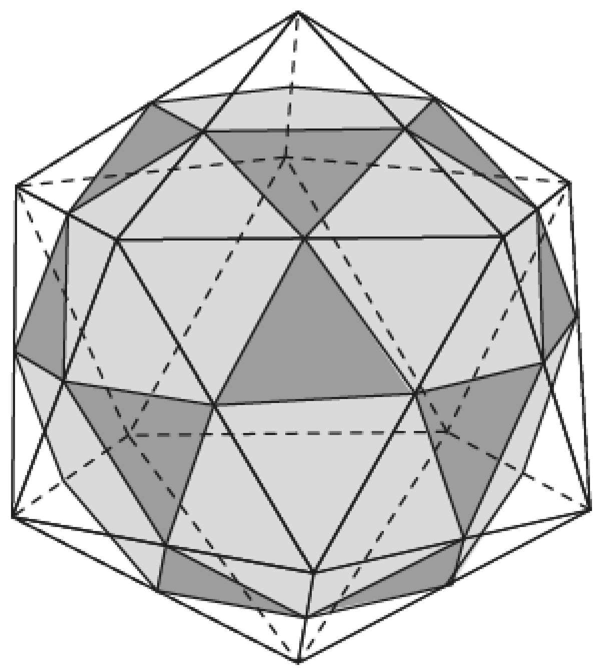


Рис. 84

(C) Изобразите многогранник, вершинами которого являются середины рёбер единичного додекаэдра (рис. 10). Как он называется? Найдите его рёбра.

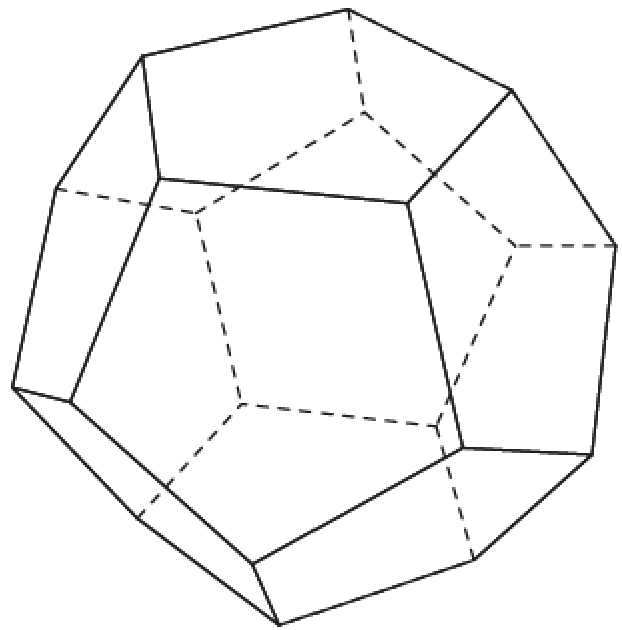


Рис. 10

Решение. Искомым многогранником является икосододекаэдр (рис. 86). Его гранями являются 20 правильных треугольников, как у икосаэдра, и 12 правильных пятиугольников, как у додекаэдра. Его рёбра равны $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

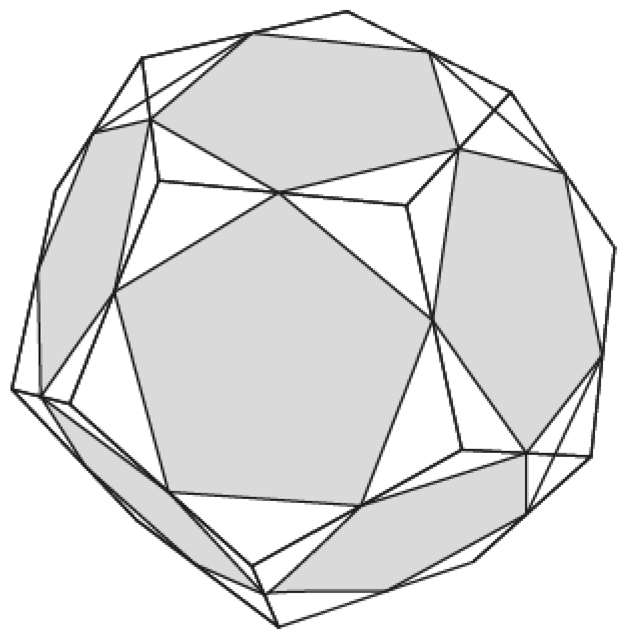


Рис. 86

(С) Рёбра додекаэдра равны 1. Найдите рёбра куба, вершинами которого являются некоторые вершины этого додекаэдра (рис. 14).

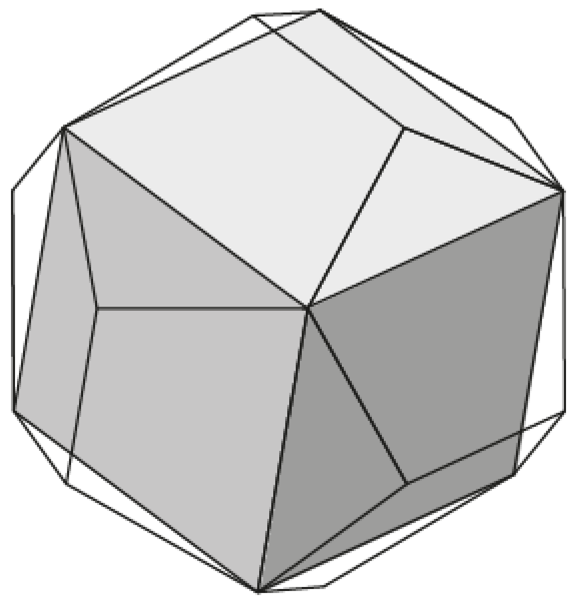


Рис. 14

Решение. Ребро куба равно диагонали грани додекаэдра (рис. 89), т. е. равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

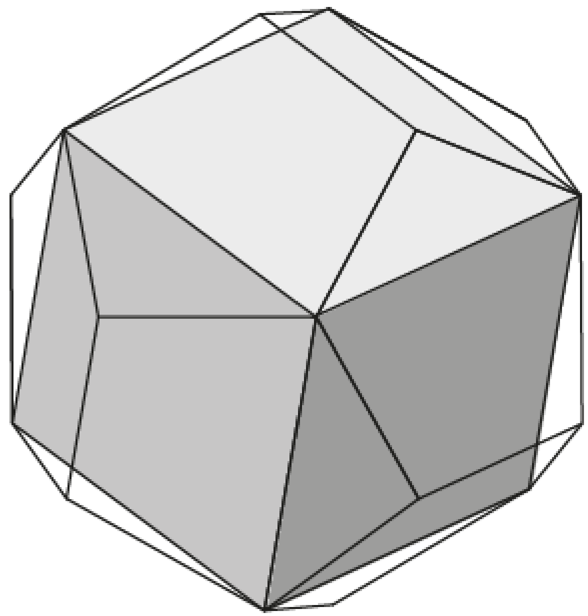


Рис. 89

(D) Рёбра додекаэдра равны 1. Найдите ребро правильного тетраэдра, вершинами которого являются некоторые вершины этого додекаэдра (рис. 15).

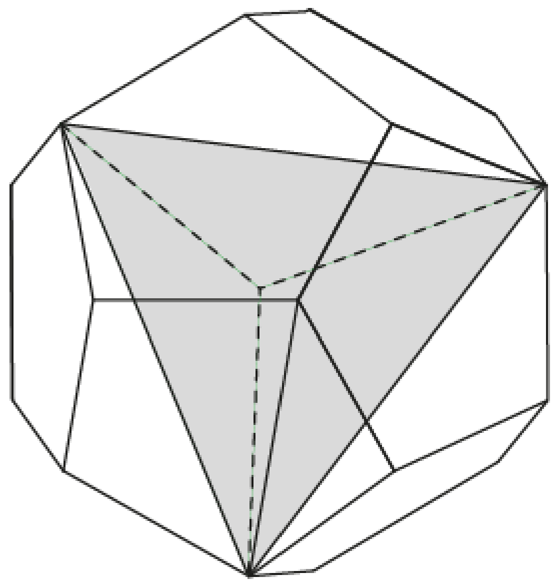


Рис. 15

Решение. Ребро правильного тетраэдра равно диагонали грани куба (рис. 90), вписанного в додекаэдр, т. е. равно $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$.

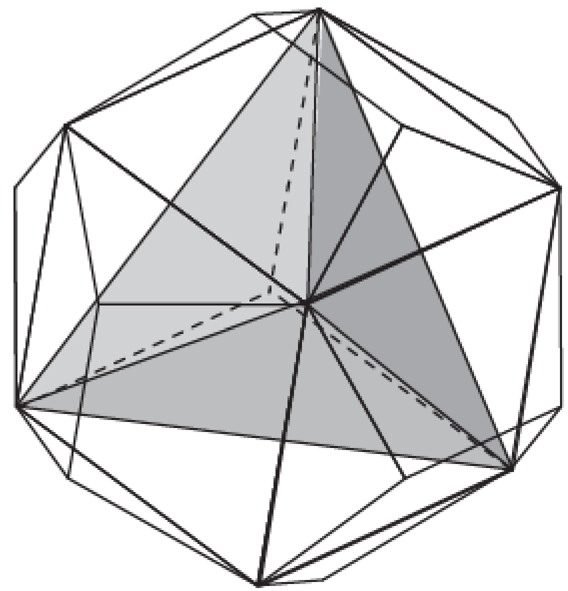


Рис. 90

(D) Центры граней октаэдра являются центрами некоторых граней икосаэдра (рис. 21). Найдите рёбра икосаэдра, если рёбра октаэдра равны 1.

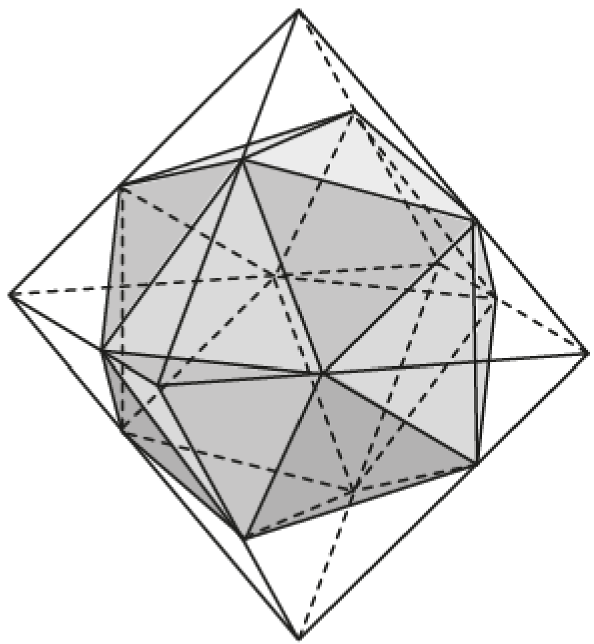


Рис. 21

Решение. Обозначим ABC одну из граней исходного октаэдра. На сторонах треугольника ABC отложим равные отрезки $AD = BE = CF = x$ (рис. 96). Тогда треугольник DEF будет равносторонним. Сделаем то же самое с остальными гранями октаэдра. Получим равносторонние треугольники на всех гранях октаэдра. Для того чтобы многогранник, вершинами которого являются вершины всех этих треугольников, был икосаэдром, нужно, чтобы отрезок FG был равен отрезку EF. Найдём эти отрезки. Треугольник CFG является прямоугольным и равнобедренным, $CF = CG = x$. Следовательно, $FG = \sqrt{2}x$. Используя теорему косинусов, применённую к треугольнику ECF, находим $EF^2 = x^2 + (1-x)^2 - x(1-x) = 3x^2 - 3x + 1$. Следовательно, имеем уравнение $x^2 - 3x + 1 = 0$, решая которое находим $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Значит, рёбра икосаэдра равны $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$.

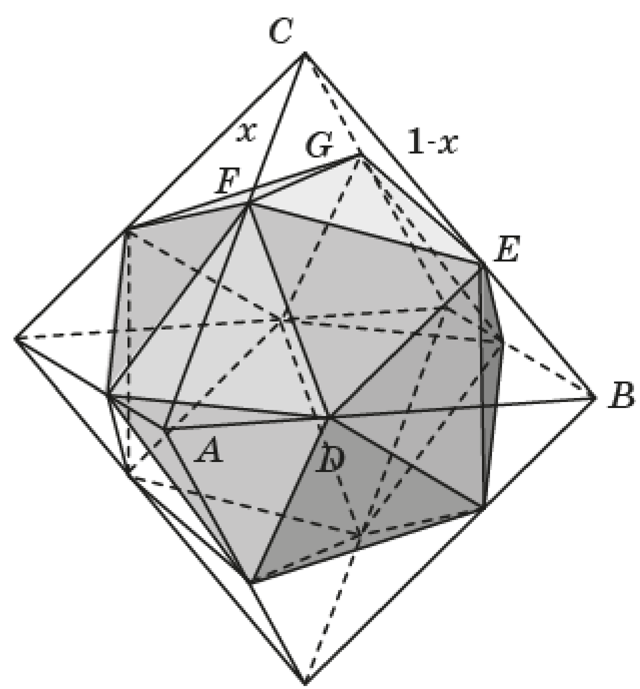
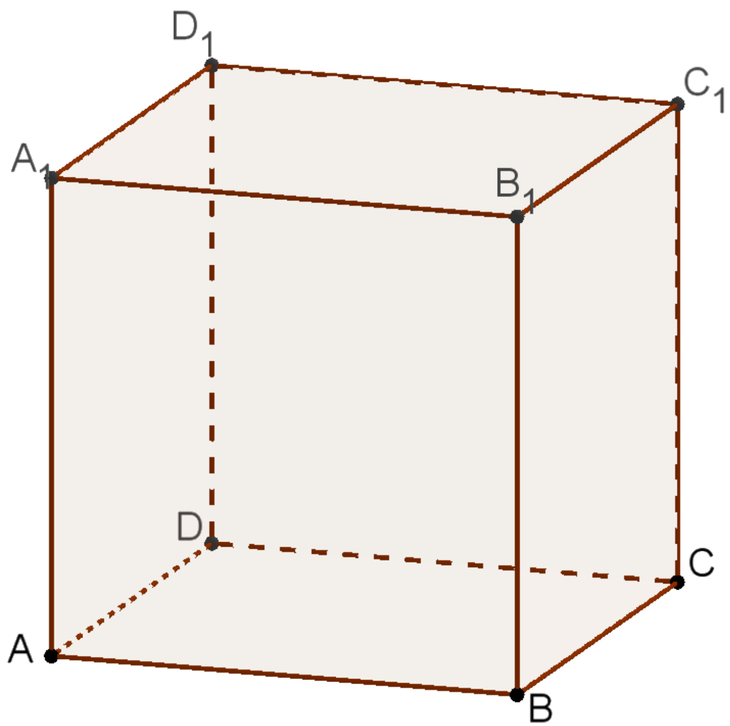


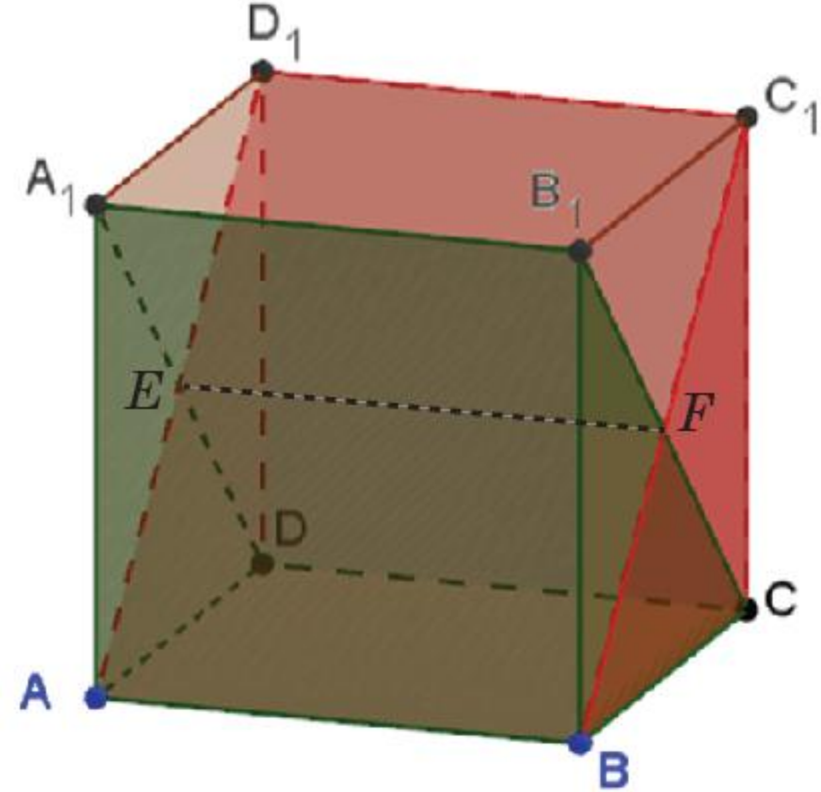
Рис. 96

Объём общей части многогранников

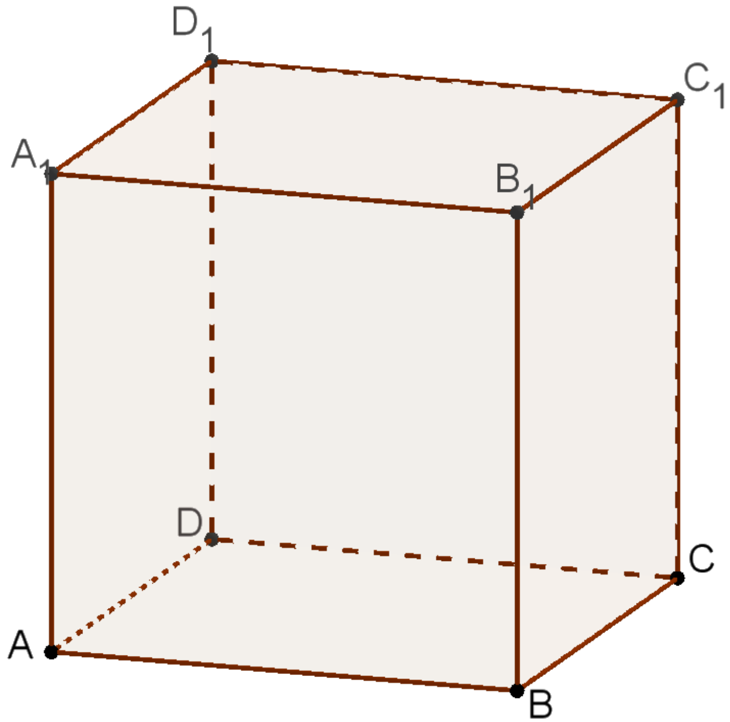
(B) Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите объём общей части призм ADA_1BCB_1 и ADD_1BCC_1 .



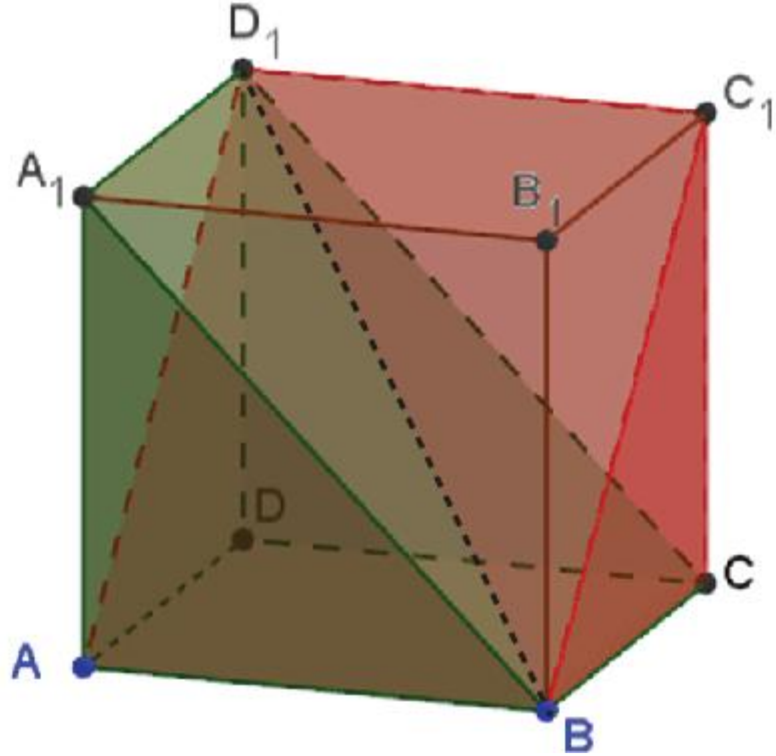
Решение. Общей частью призм ADA_1BCB_1 и ADD_1BCC_1 является треугольная призма $ADEBCF$. Её объём равен $\frac{1}{4}$.



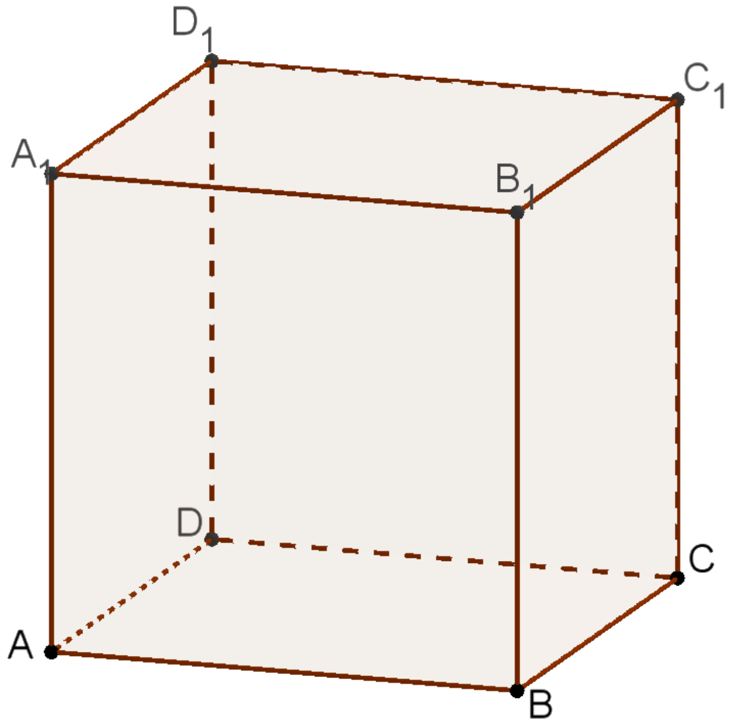
(В) Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите объём общей части призм ABA_1DCD_1 и ADD_1BCC_1 .



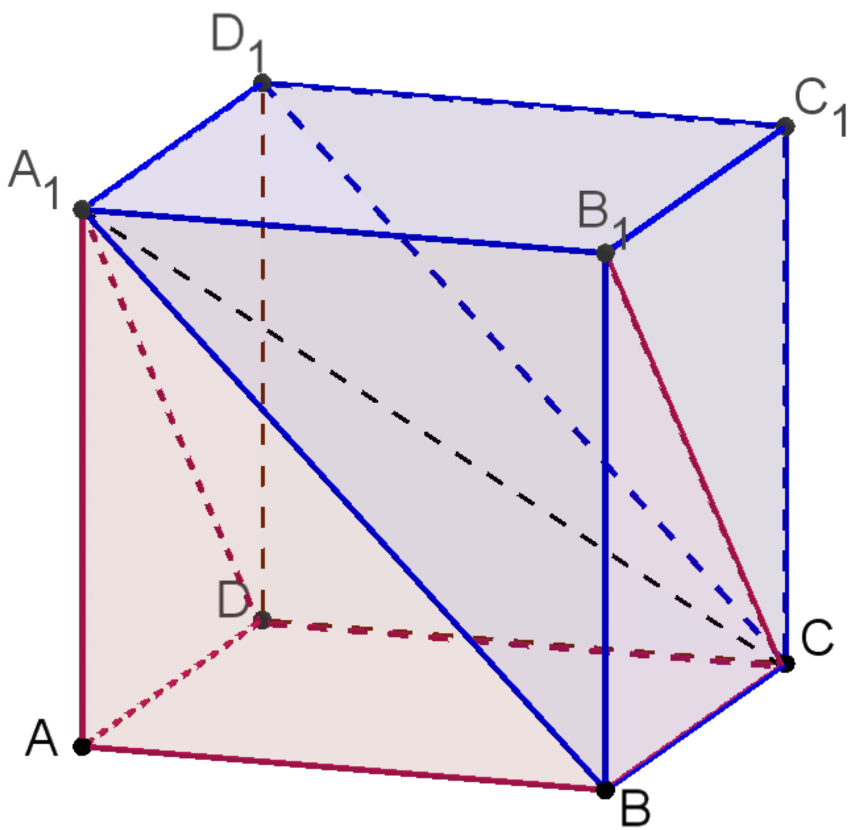
Решение. Общей частью призм ABA_1DCD_1 и ADD_1BCC_1 является четырёхугольная пирамида D_1ABCD. Её объём равен $\frac{1}{3}$.



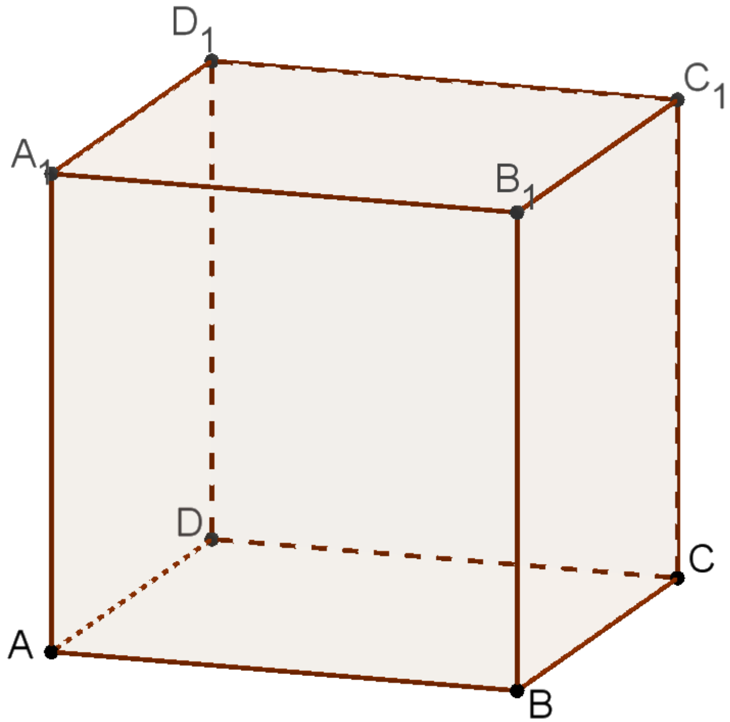
(B) Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите объём общей части двух призм ADA_1BCB_1 и $BA_1B_1CD_1C_1$.



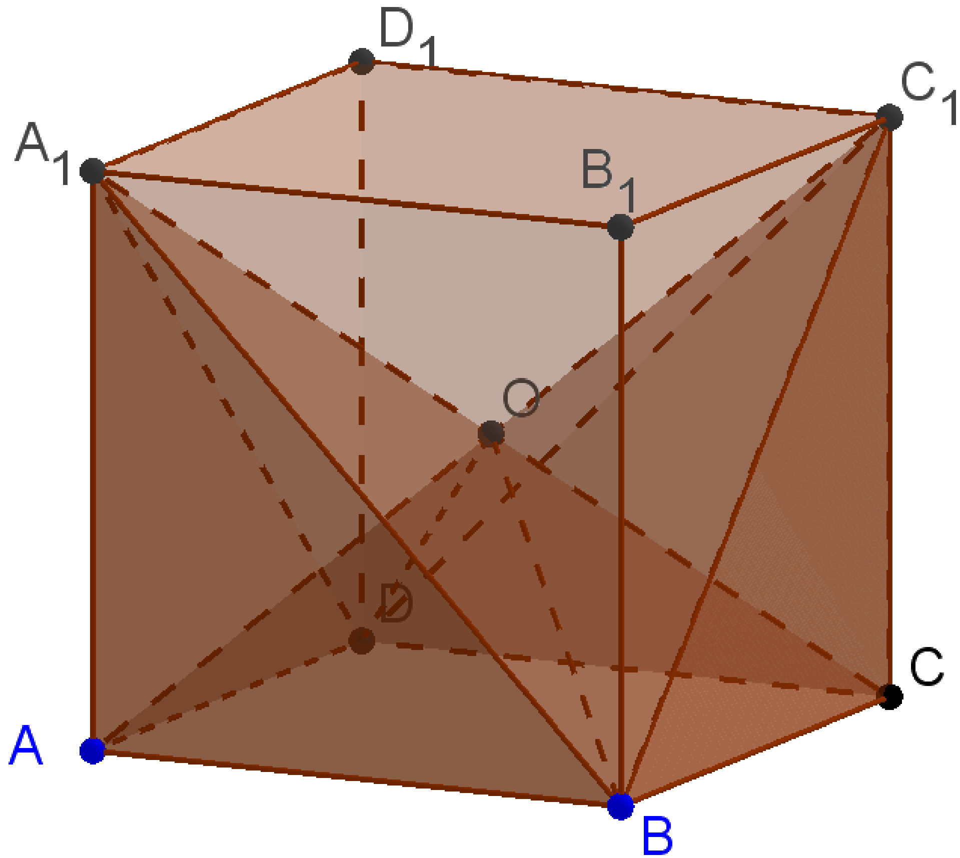
Решение. Общей частью призм ADA_1BCB_1 и $BA_1B_1CD_1C_1$ является треугольная пирамида A_1BCB_1. Её объём равен $\frac{1}{6}$.



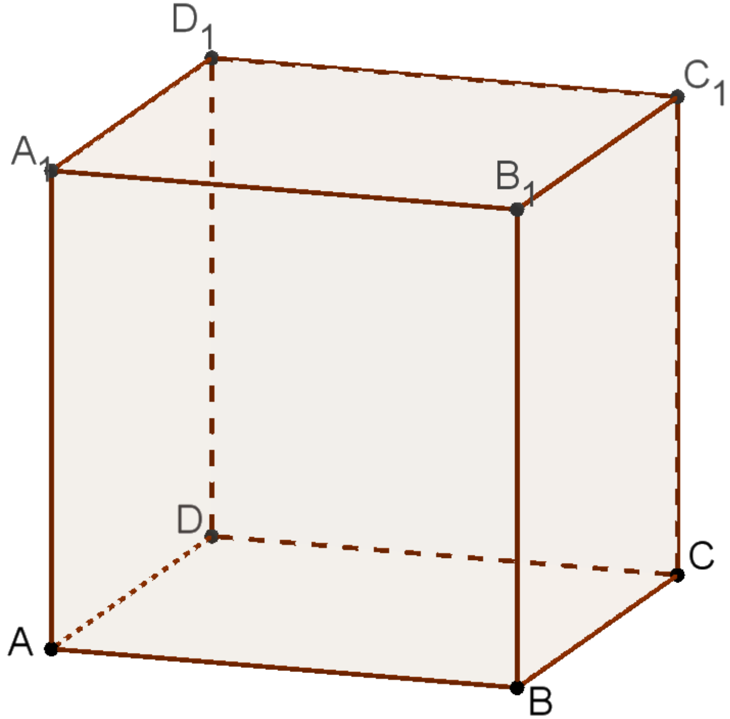
(B) Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите объём общей части двух пирамид A_1ABCD и C_1ABCD.



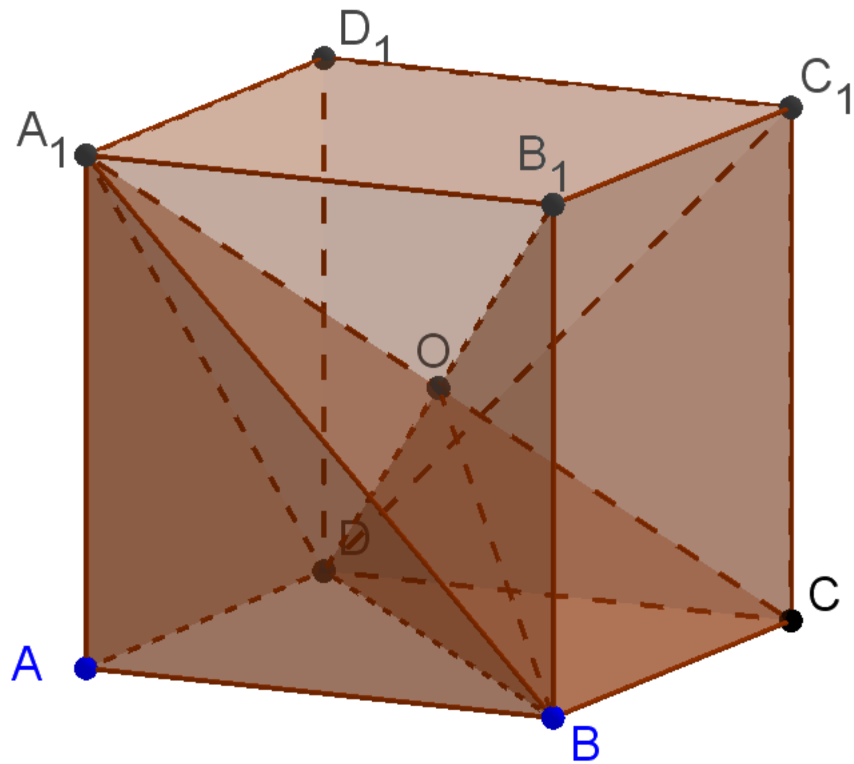
Решение. Общей частью двух пирамид A_1ABCD и C_1ABCD является четырехугольная пирамида $OABCD$, объем которой равен $\frac{1}{6}$.



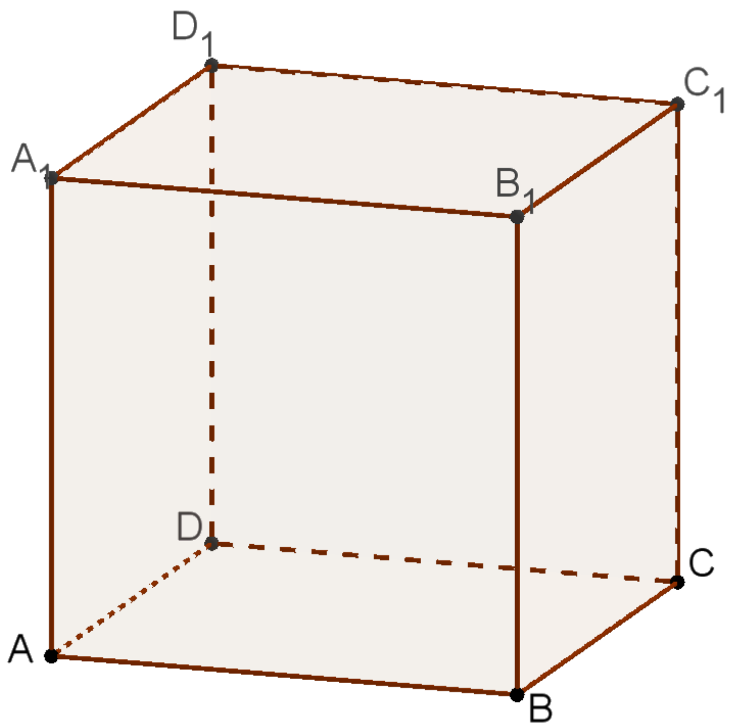
(С) Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите объём общей части двух пирамид A_1ABCD и $DBCC_1B_1$.



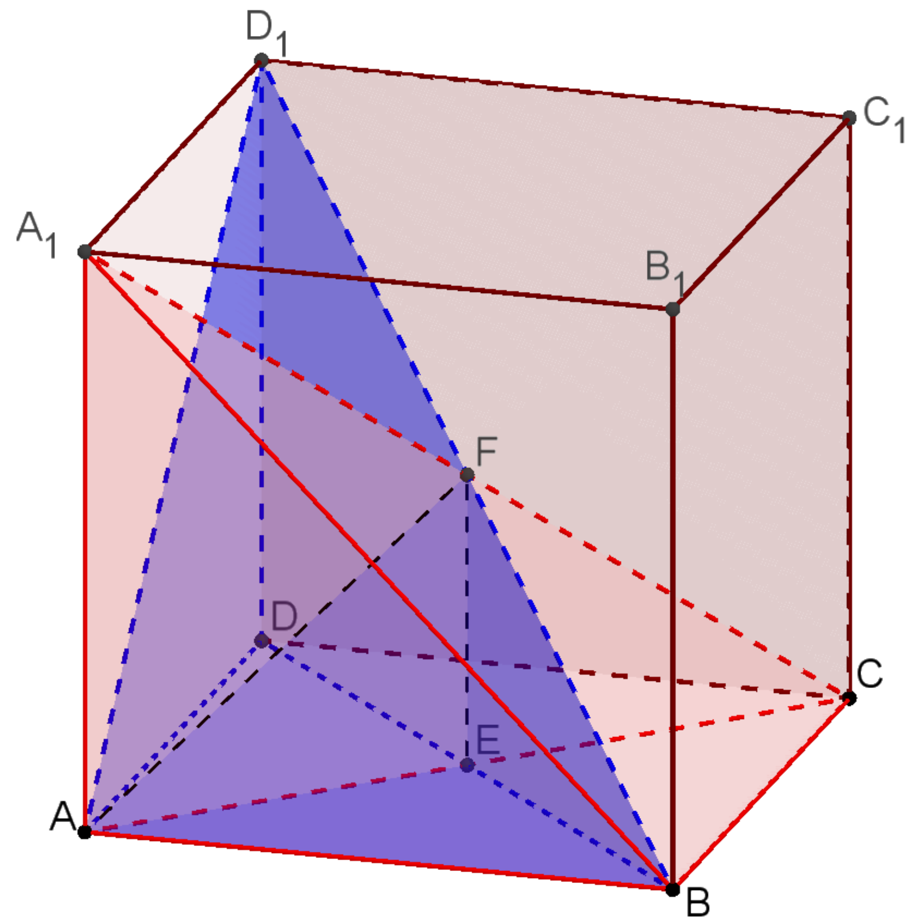
Решение. Общей частью двух пирамид A_1ABCD и $DBCC_1B_1$ является треугольная пирамида $OBCD$, объем которой равен $\frac{1}{12}$.



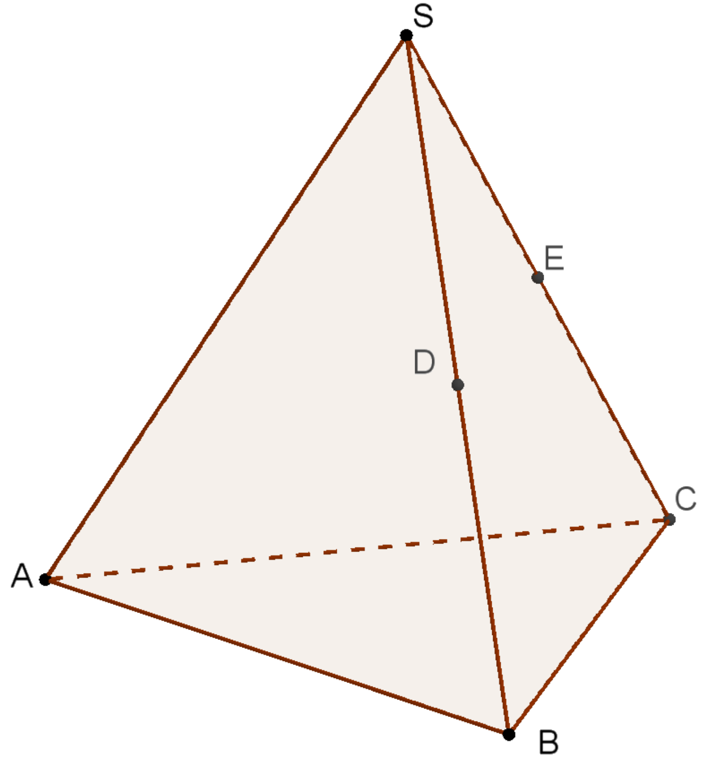
(C) Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите объём общей части двух пирамид A_1ABC и D_1ABD.



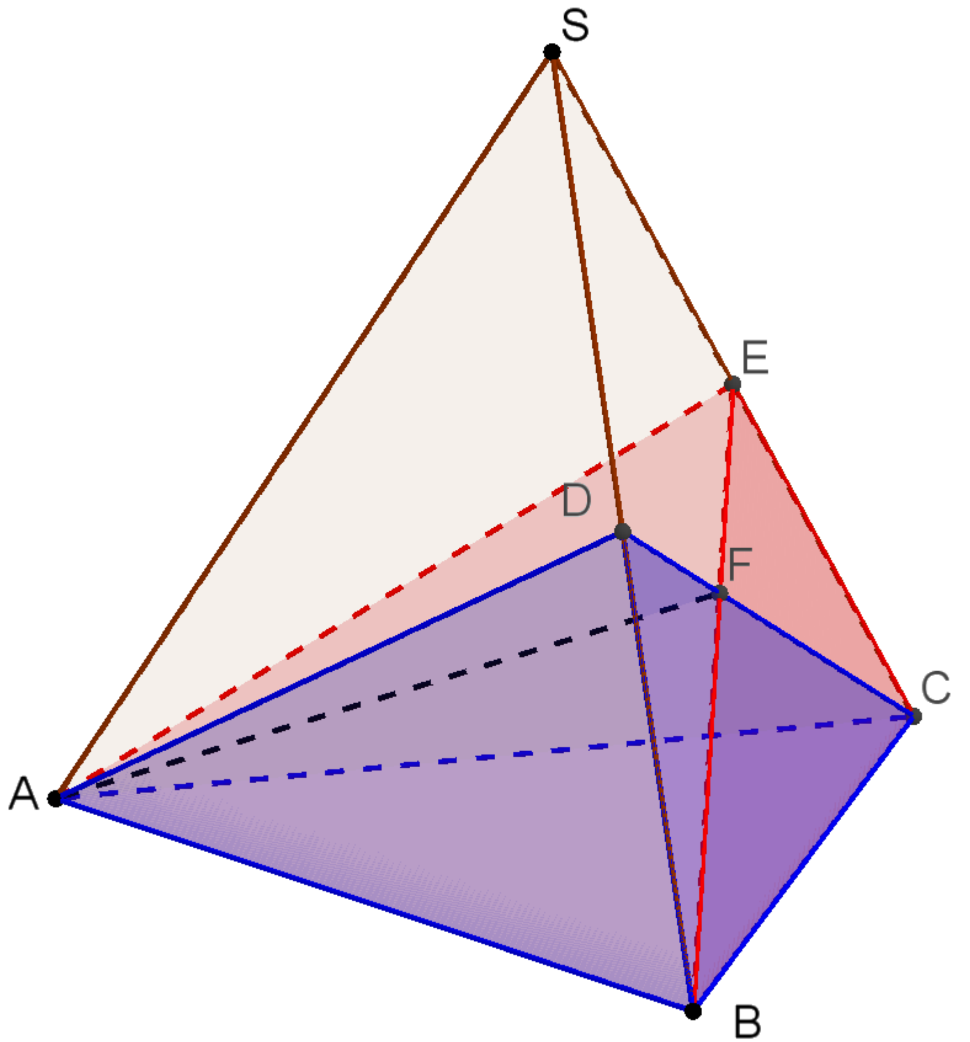
Решение. Общей частью двух пирамид A_1ABC и D_1ABD является треугольная пирамида $FABE$, объем которой равен $\frac{1}{24}$.



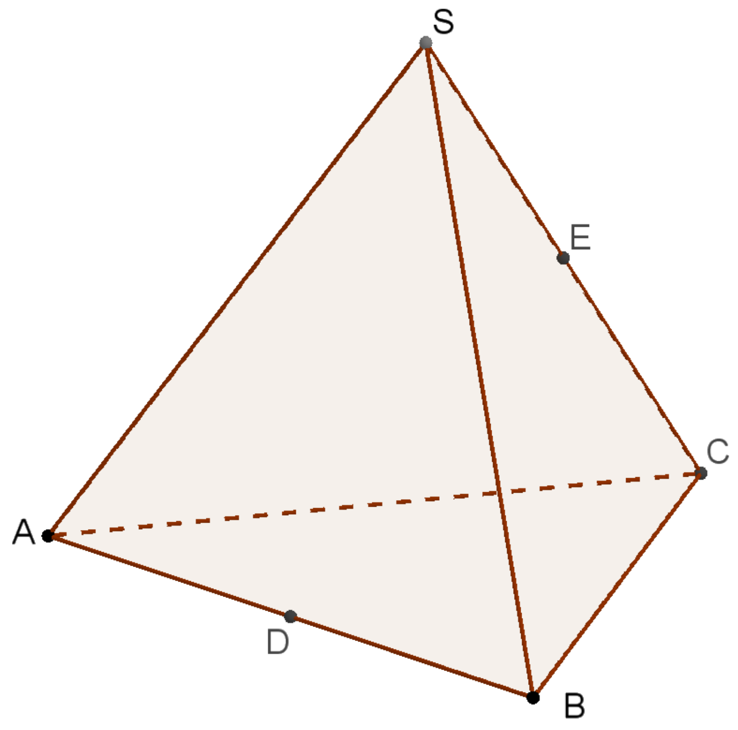
(В) Объем треугольной пирамиды $SABC$ равен 1, D – середина ребра SB, E – середина ребра SC. Найдите объем общей части двух пирамид $DABC$ и $EABC$.



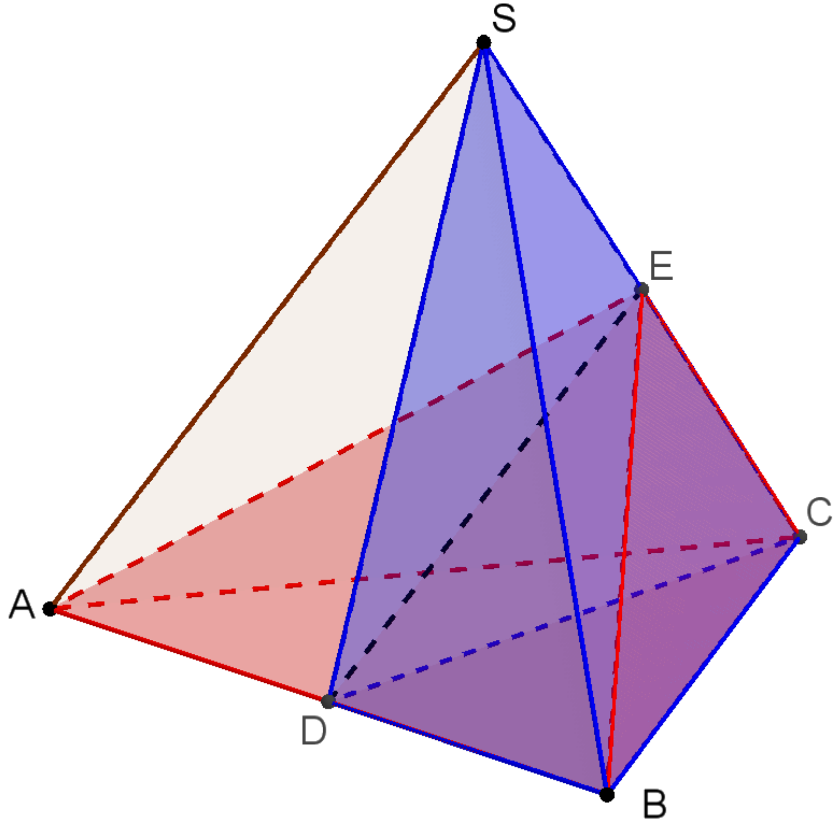
Решение. Общей частью двух пирамид $DABC$ и $EABC$ является треугольная пирамида $ABCF$, объем которой равен $\frac{1}{3}$.



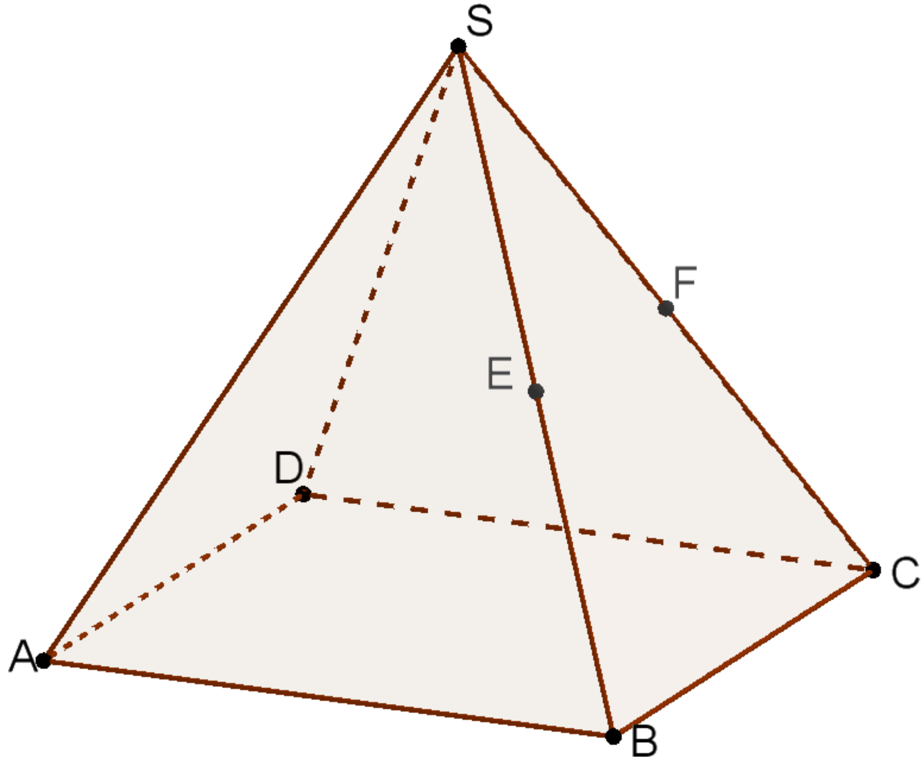
(В) Объем треугольной пирамиды *SABC* равен 1, *D* – середина ребра *AB*, *E* – середина ребра *SC*. Найдите объем общей части двух пирамид *EABC* и *SBCD*.



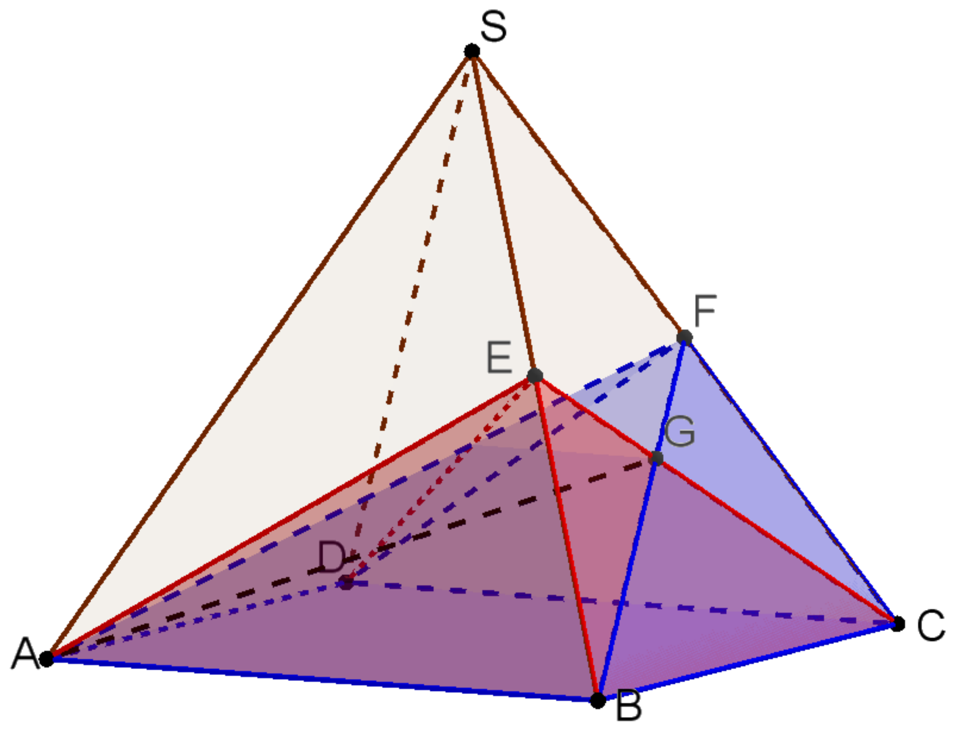
Решение. Общей частью двух пирамид $EABC$ и $SBCD$ является треугольная пирамида $EBCD$, объем которой равен $\frac{1}{4}$.



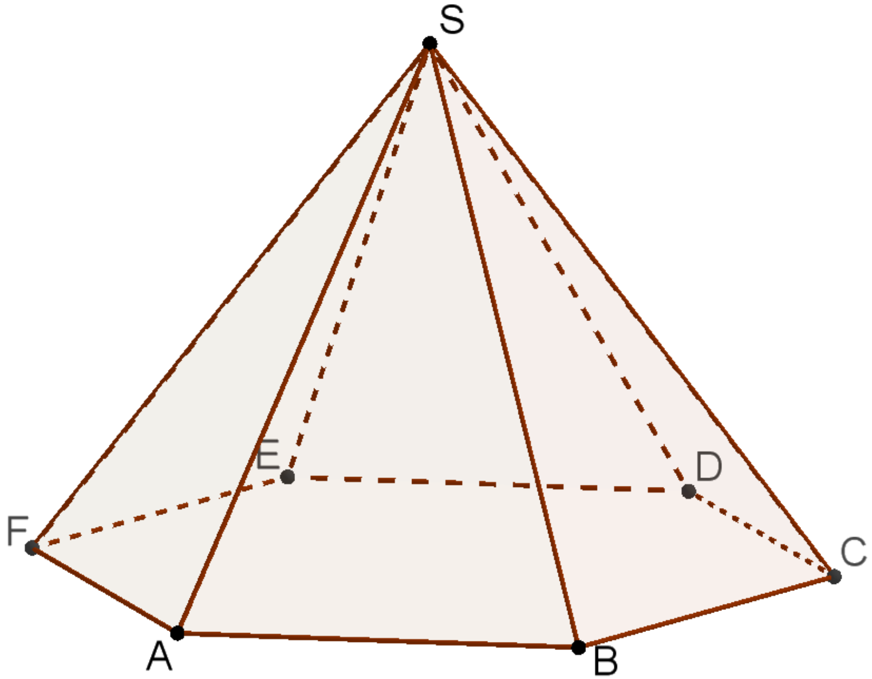
(B) Объем четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен 1, E – середина ребра SB, F – середина ребра SC. Найдите объем общей части двух пирамид $EABCD$ и $FABCD$.



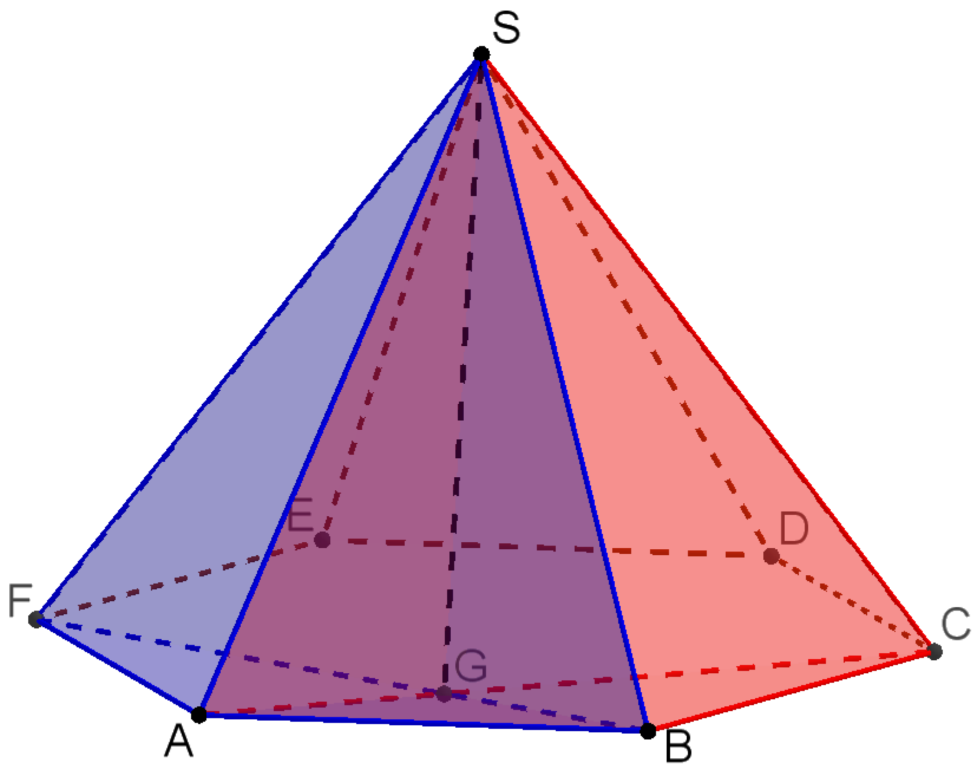
Решение. Общей частью двух пирамид $EABCD$ и $FABCD$ является четырёхугольная пирамида $GABCD$, объем которой равен $\frac{1}{3}$.



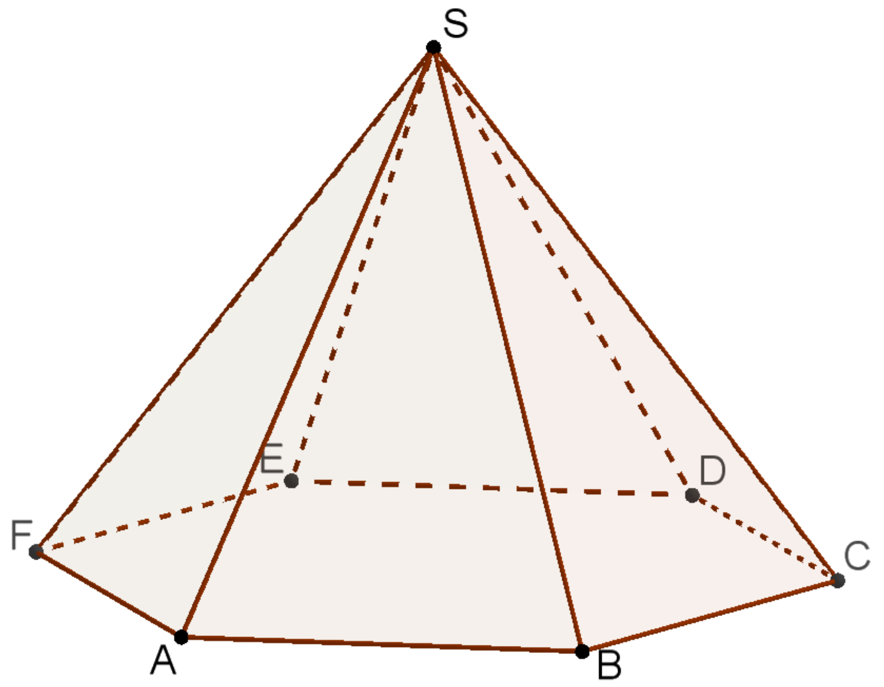
(B) Объем правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* равен 1. Найдите объем общей части двух пирамид *SABC* и *SABF*.



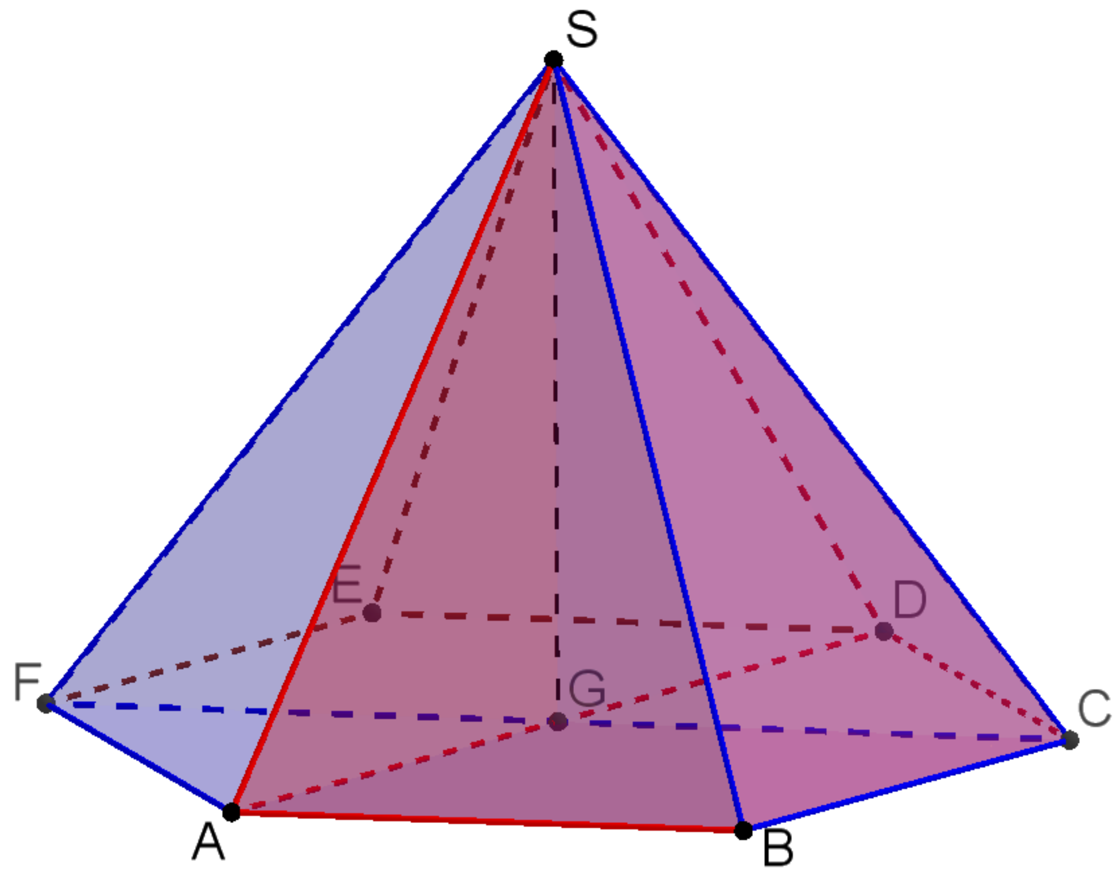
Решение. Общей частью двух пирамид $SDEF$ и $SEFA$ является треугольная пирамида $SABG$, объем которой равен $\frac{1}{18}$.



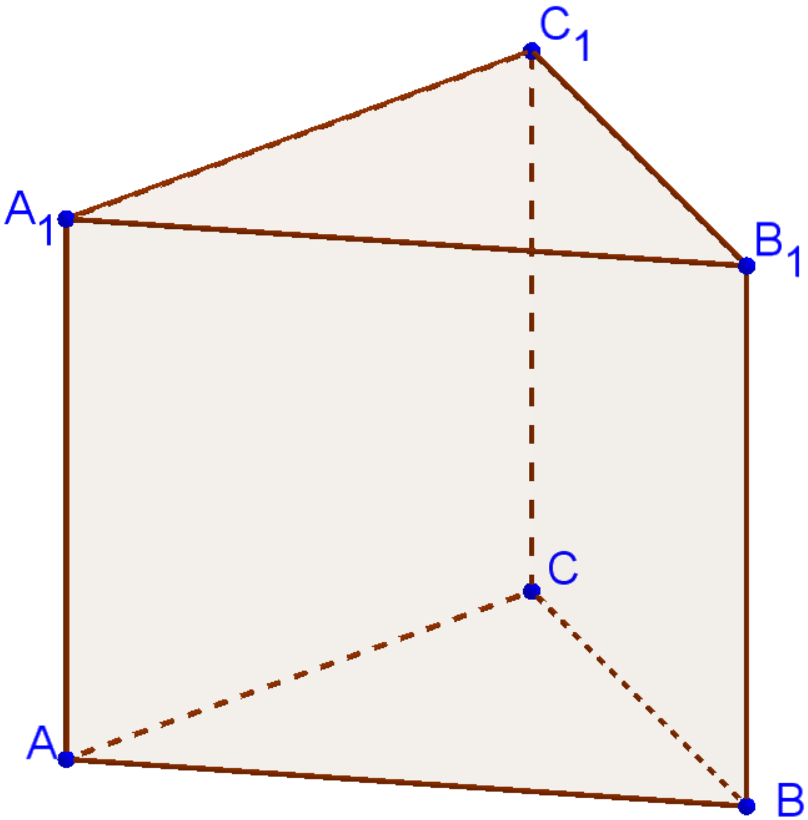
(B) Объем правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* равен 1. Найдите объем общей части двух пирамид *SABCD* и *SABCF*.



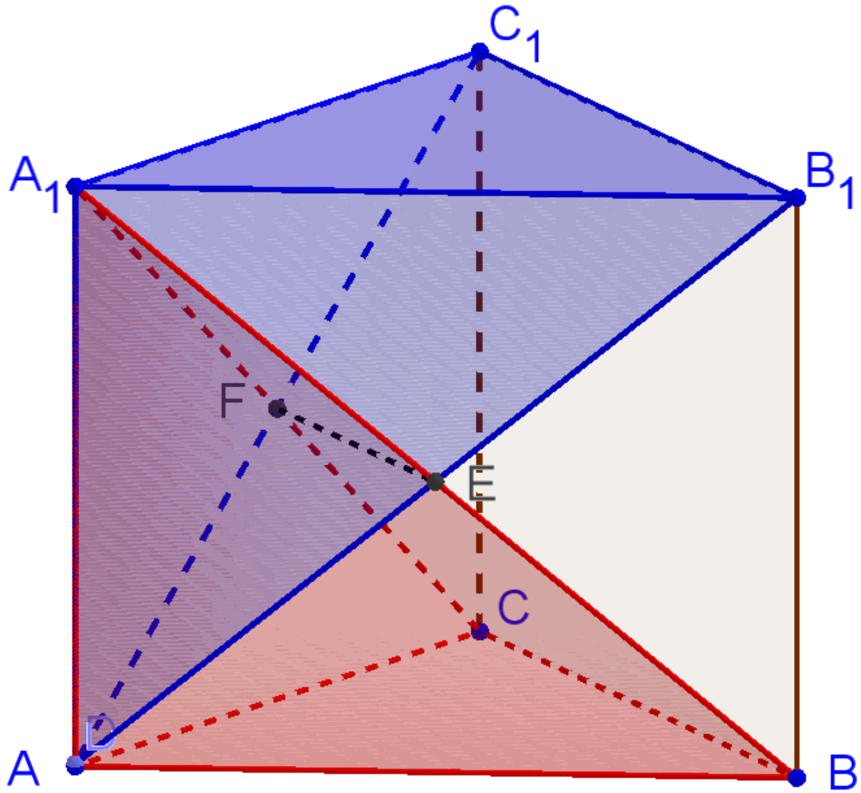
Решение. Общей частью двух пирамид $SABCD$ и $SABCF$ является четырёхугольная пирамида $SABCG$, объем которой равен $\frac{1}{3}$.



(C) Найдите объем общей части двух пирамид A_1ABC и $AA_1B_1C_1$, содержащихся в треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, объем которой равен 1.



Решение. Общей частью двух пирамид A_1ABC и $AA_1B_1C_1$ является треугольная пирамида AA_1EF, объем которой равен $\frac{1}{12}$.



(В) Правильную треугольную призму повернули вокруг прямой, проходящей через центры её оснований, на угол 60^{o} (рис. 50). Какой многогранник является общей частью исходной призмы и повёрнутой? Найдите его объём, если объём исходной призмы равен 1.

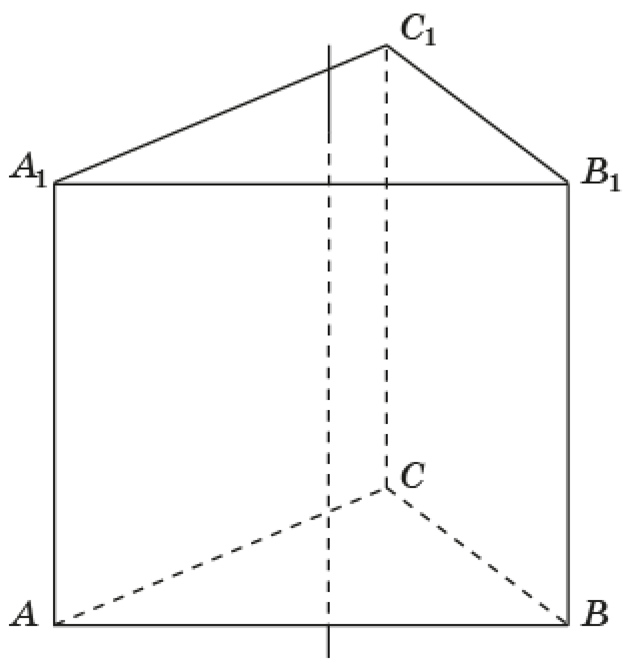
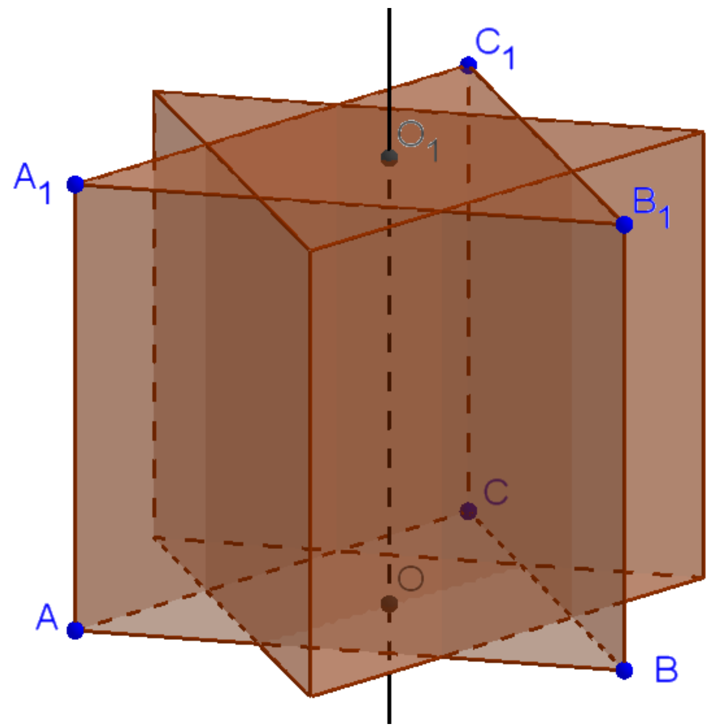


Рис. 50

Решение. Данная и повёрнутая призмы показаны на рисунке. Их общей частью является правильная шестиугольная призма, стороны основания которой в три раза меньше сторон основания исходной призмы, а высота равна высоте этой призмы. Объём шестиугольной призмы равен $\frac{2}{3}$.



(C) Единичный куб повернули вокруг прямой, проходящей через центры его противолежащих граней, на угол 45° (рис. 55). Какой многогранник является общей частью исходного куба и повёрнутого? Найдите его объём.

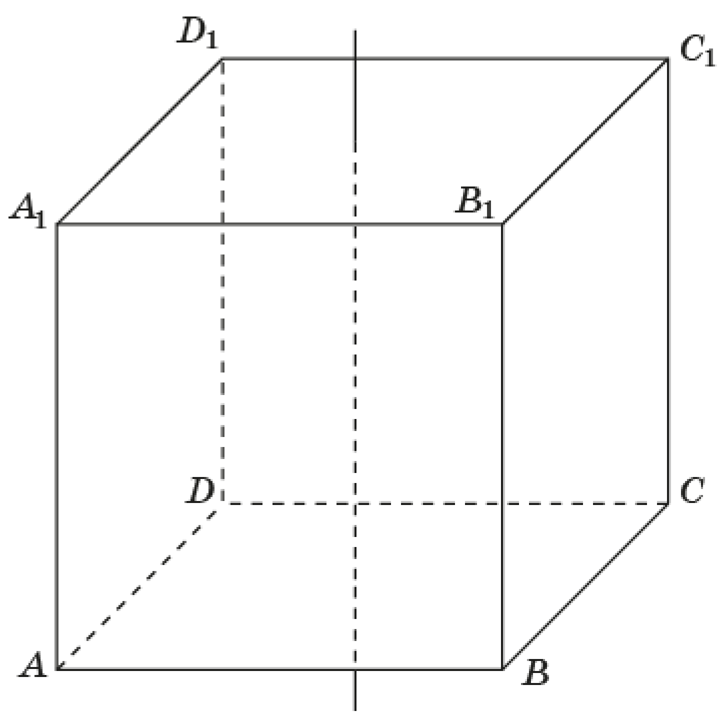
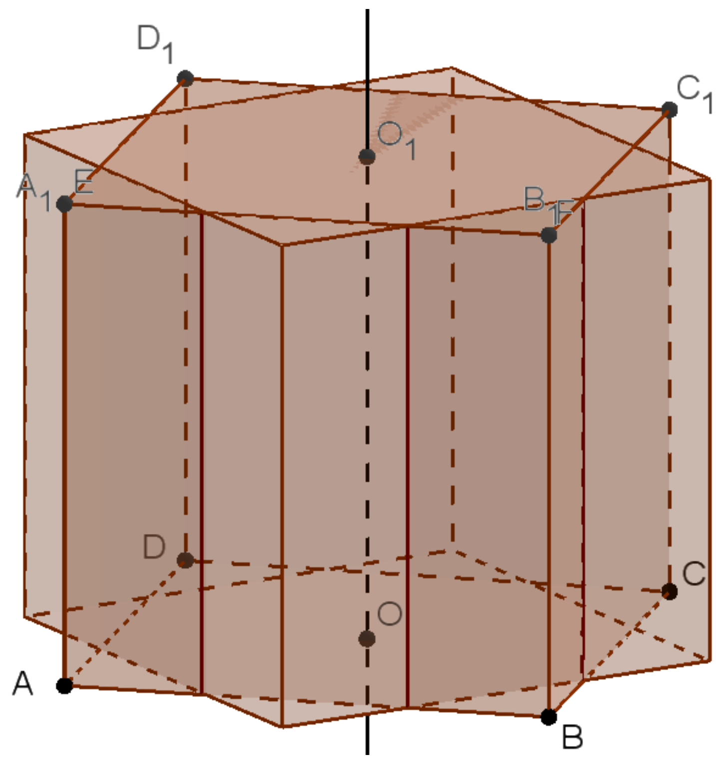


Рис. 55

Решение. Данный и повёрнутый кубы показаны на рисунке. Общей частью этих кубов является правильная восьмиугольная призма, боковые рёбра которой равны 1, а стороны основания равны $\sqrt{2}-1$. Эта призма получается из единичного куба отрезанием четырёх треугольных призм, объём каждой из которых равен $\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$. Следовательно, искомый объём правильной восьмиугольной призмы равен $2\sqrt{2}-2$.



(C) Правильную треугольную призму, все рёбра которой равны 1, повернули вокруг прямой, проходящей через середину её бокового ребра и центр противолежащей этому ребру грани, на угол 90° (рис. 52). Какой многогранник является общей частью исходной призмы и повёрнутой? Найдите его объём.

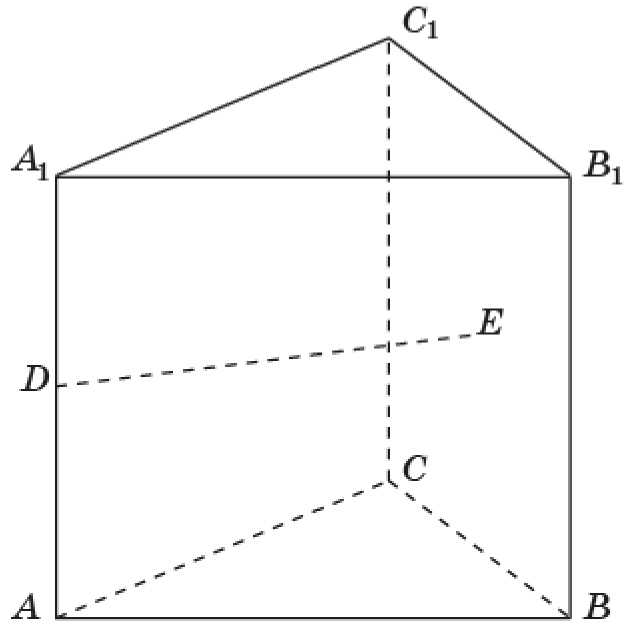
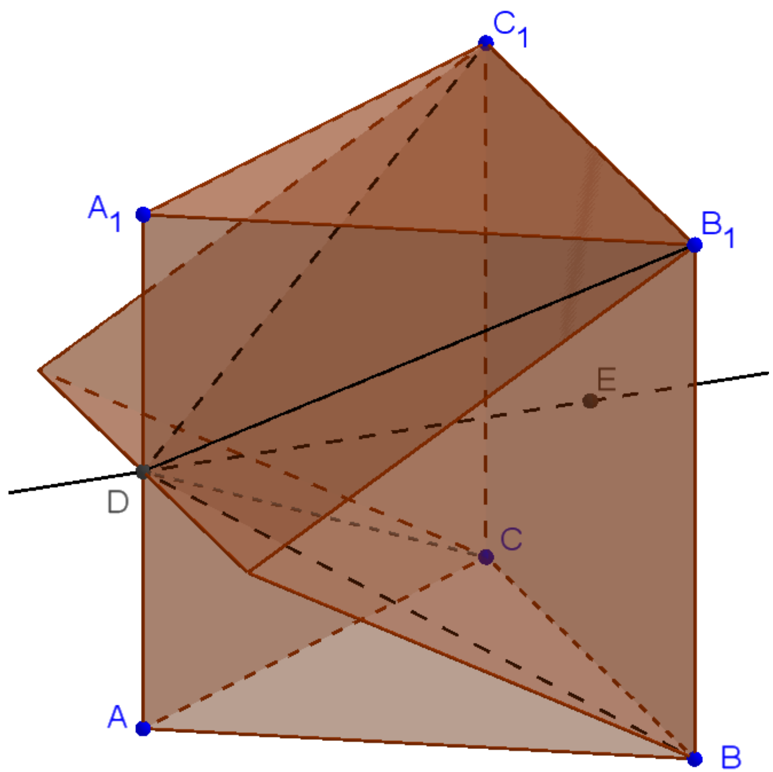
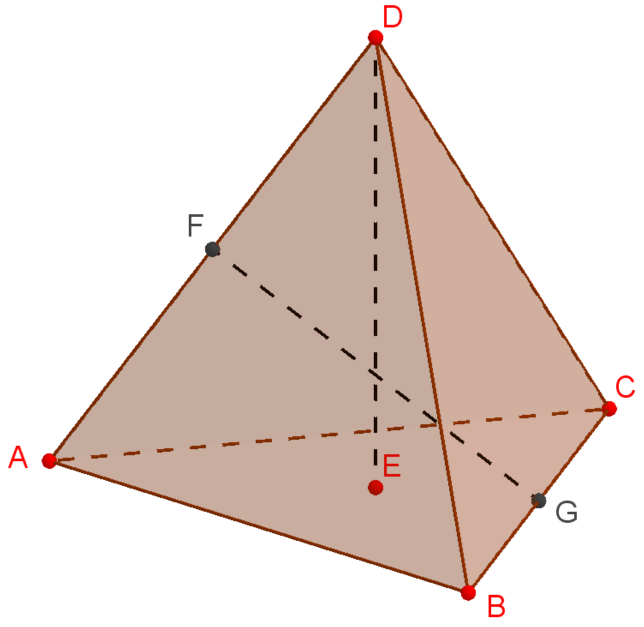


Рис. 52

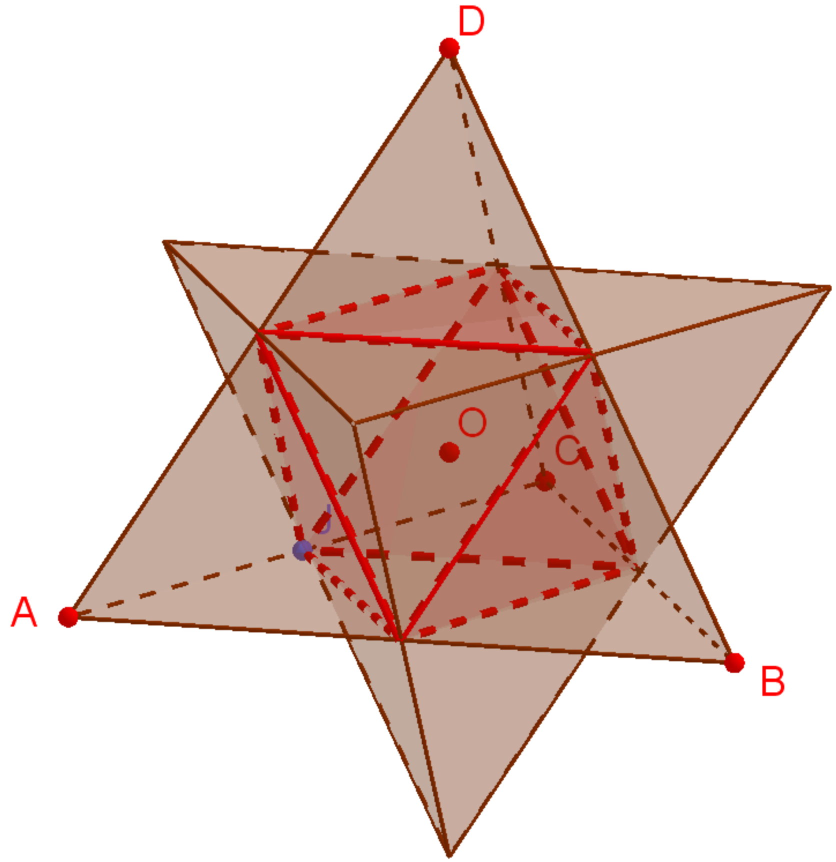
Решение. Данная и повёрнутая призмы показаны на рисунке. Их общей частью является правильная четырёхугольная пирамида, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Объём этой пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



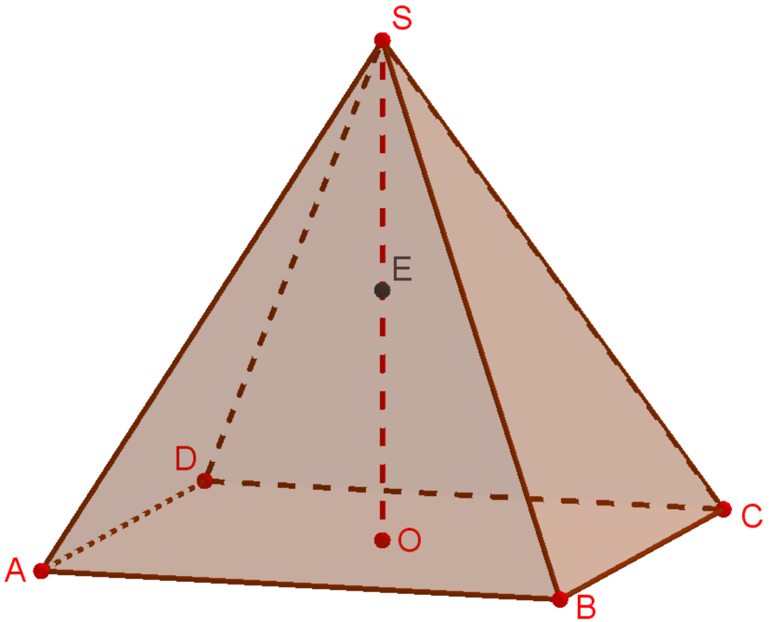
(С) Правильный тетраэдр повернули вокруг прямой, проходящей через середины двух его противолежащих рёбер, на угол 90^{o} (рис. 58). Какой многогранник является общей частью исходного тетраэдра и повёрнутого? Найдите его объём, если объём исходного тетраэдра равен 1.



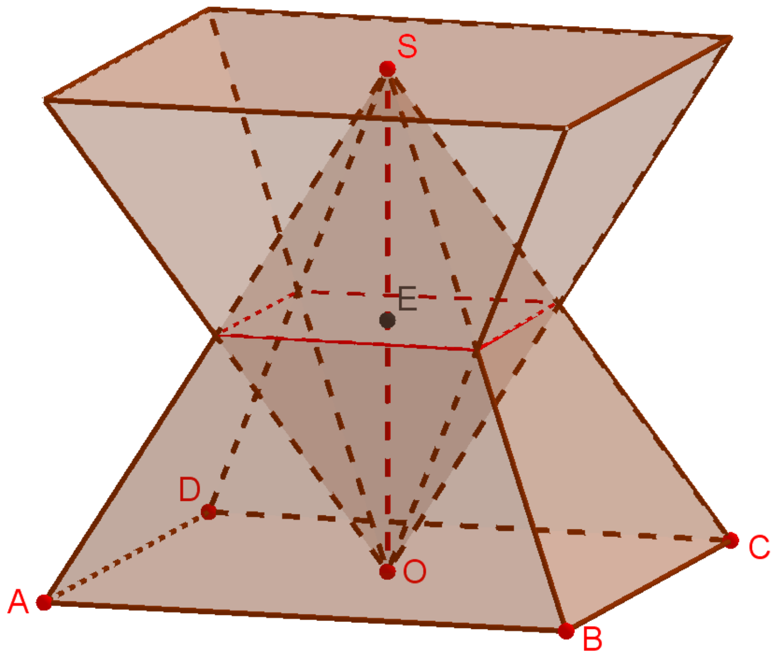
Ответ. Общей частью исходного тетраэдра и повернутого является октаэдр. Его объём равен 0,5.



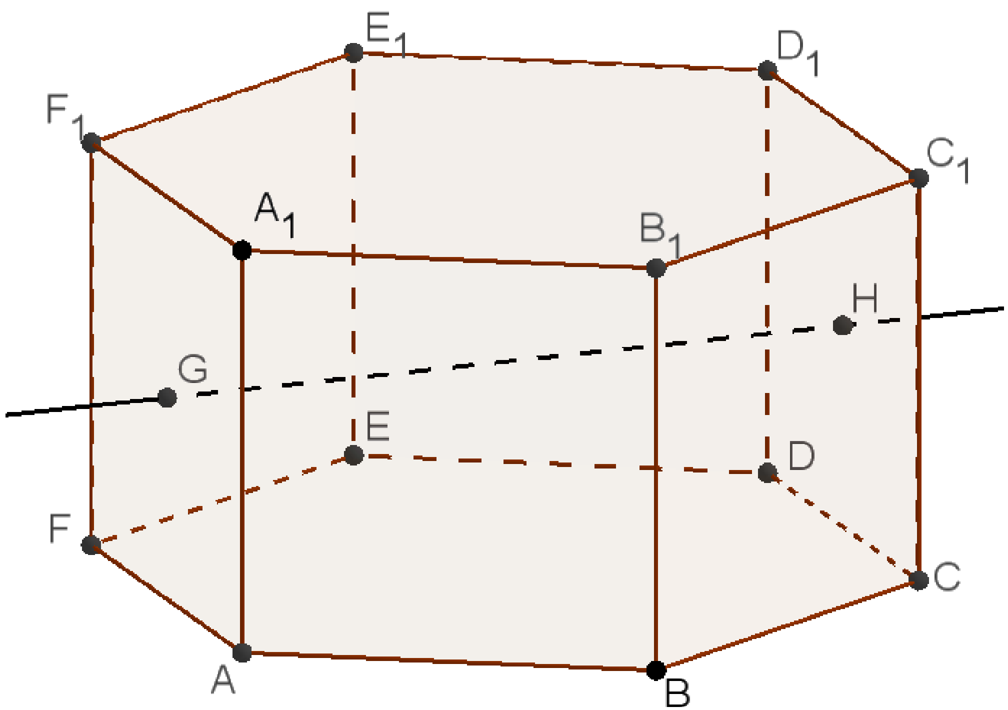
(С) Правильную четырёхугольную пирамиду симметрично отразили относительно середины её высоты. Найдите объём общей части исходной и симметричной пирамид, если объём исходной пирамиды равен 1.



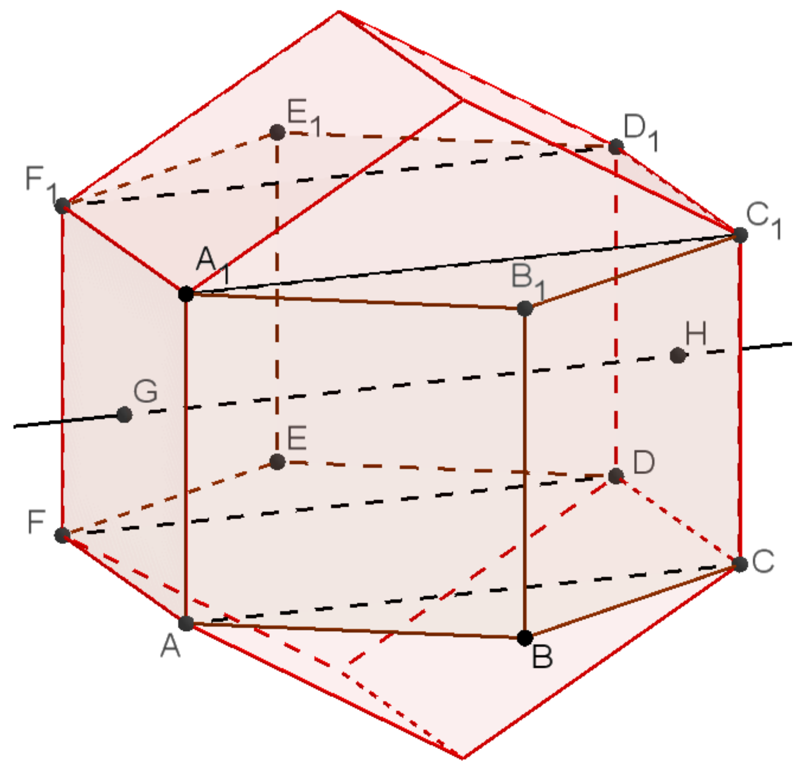
Решение. Общей частью пирамид является октаэдр (правильная 4-я бипирамида). Его объем равен $\frac{1}{4}$.



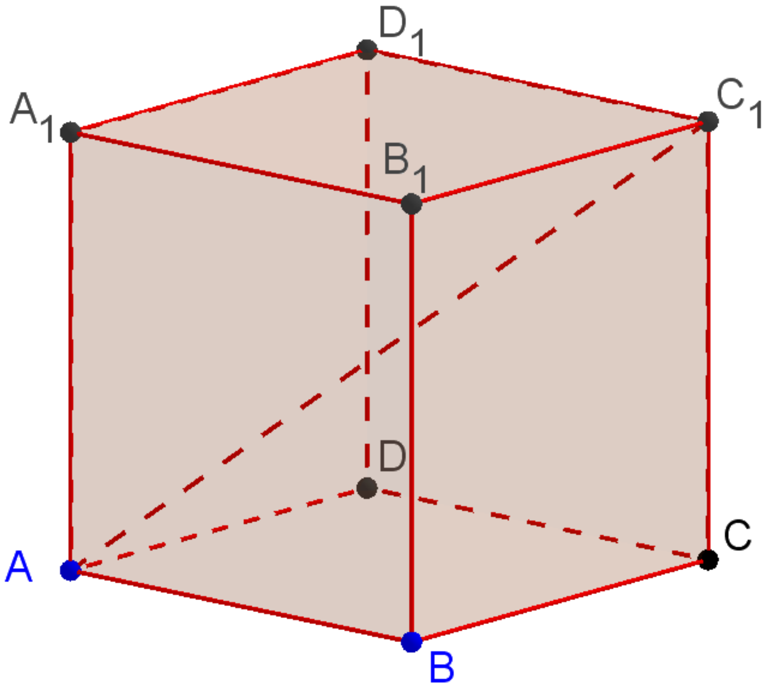
(D) Правильную шестиугольную призму, все рёбра которой равны 1, повернули вокруг прямой, проходящей через центры противолежащих боковых граней, на угол 90°. Какой многогранник является общей частью исходной призмы и повёрнутой? Найдите его объём.



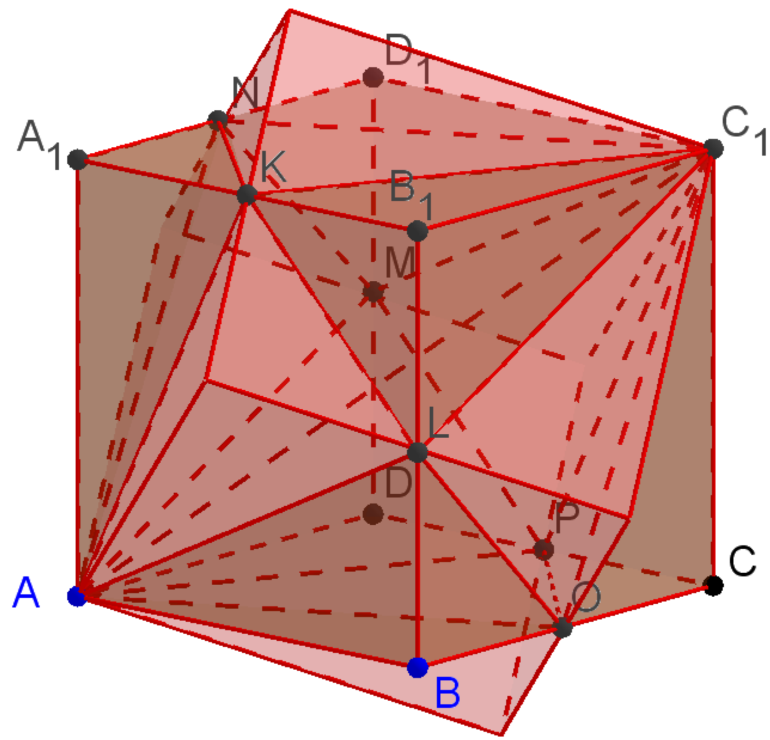
Решение. Исходная и повёрнутая призмы показаны на рисунке. Их общей частью является прямоугольный параллелепипед $ACDFA_1C_1D_1F_1$, рёбра которого равны 1, 1, $\sqrt{3}$. Его объём равен $\sqrt{3}$.



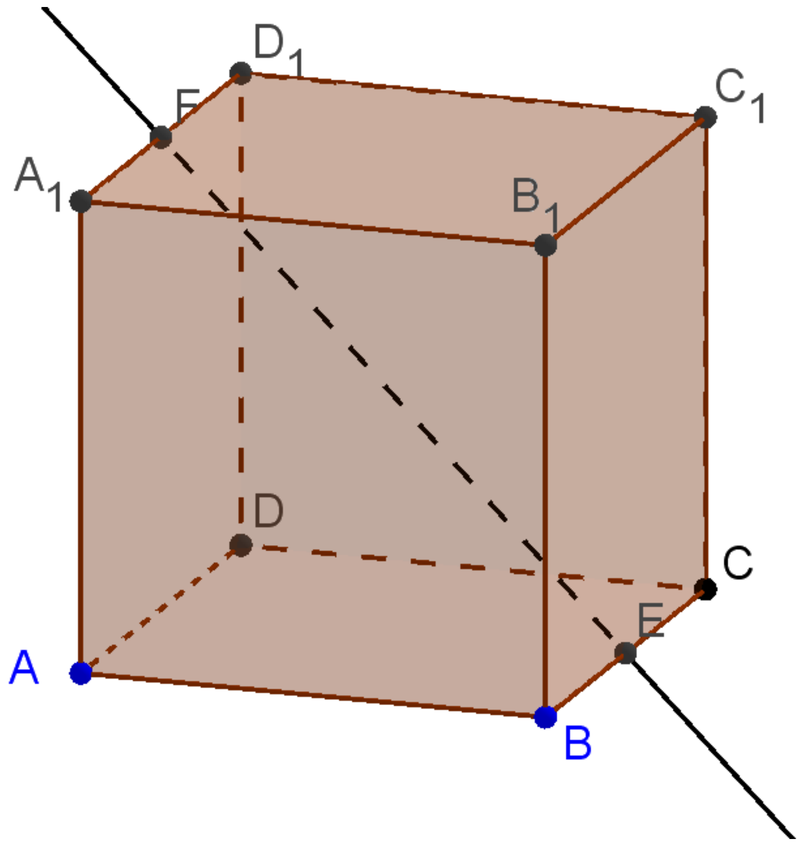
(D) Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повернули вокруг прямой AC_1 на угол 60^o. Какой многогранник является общей частью исходного куба и повёрнутого? Найдите его объём.



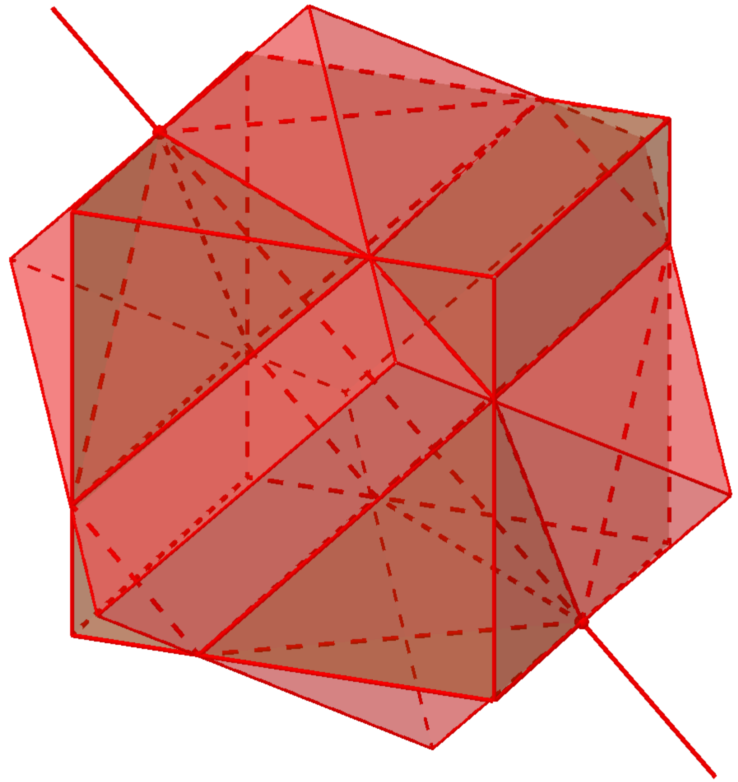
Ответ. Общей частью является правильная шестиугольная бипирамида. Её объём равен $\frac{3}{4}$.



(D) Единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ повернули вокруг прямой, проходящей через середины двух его противолежащих рёбер, на угол 90^o. Какой многогранник является общей частью исходного куба и повёрнутого? Найдите его объём.



Ответ. Общая часть состоит из двух правильных четырёхугольных пирамид и прямоугольной четырёхугольной призмы. Объём каждой пирамиды равен $\frac{1}{6}$. Объём призмы равен $\sqrt{2}-1$. Объём общей части равен $\sqrt{2}-\frac{2}{3}$.



(D) Октаэдр повернули вокруг прямой, проходящей через центры противолежащих граней, на угол 60^{o} (рис. 66). Какой многогранник является общей частью исходного октаэдра и повёрнутого? Найдите его объём, если рёбра октаэдра равны 1.

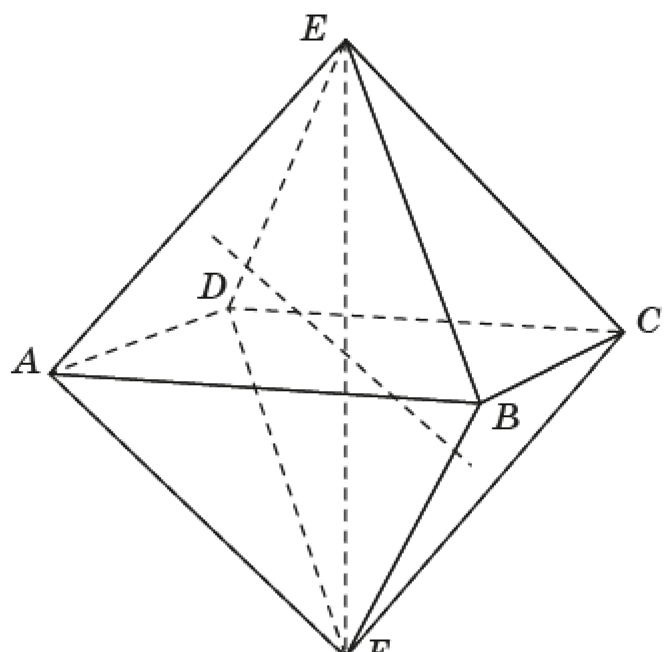


Рис. 66

Решение. Данный и повёрнутый октаэдры показаны на рисунке 140.

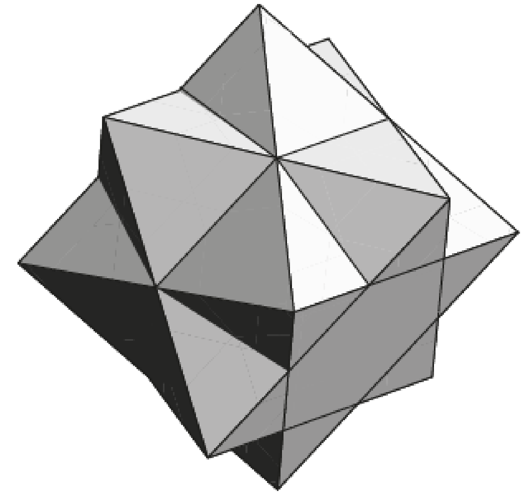


Рис. 140

Их общей частью является многогранник, составленный из двух равных правильных усечённых шестиугольных пирамид с общим основанием (рис. 141). Стороны общего основания равны $\frac{1}{2}$, стороны других оснований равны $\frac{1}{3}$, высоты равны $\frac{\sqrt{6}}{6}$, площадь общего основания равна $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, площади других оснований равны $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Воспользуемся формулой объёма усечённой пирамиды

$V = \frac{1}{3}g\left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2\right)$,

где g – высота усечённой пирамиды, S_1, S_2 – площади её оснований.

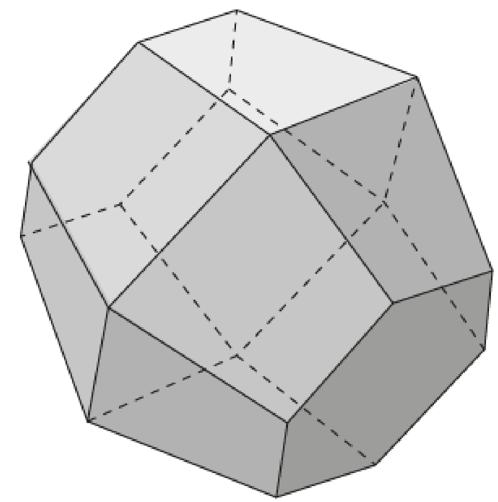


Рис. 141

Подставляя данные в эту формулу, получаем, что объём усечённой пирамиды равен $\frac{19\sqrt{2}}{144}$. Следовательно, объём многогранника равен $\frac{19\sqrt{2}}{72}$.

(D) Октаэдр, рёбра которого равны 1 (рис. 69), повернули вокруг прямой, проходящей через середины E, F двух его противолежащих рёбер на угол 90^o. Ещё один октаэдр получили поворотом исходного октаэдра вокруг прямой, проходящей через середины G, H двух других его противолежащих рёбер на угол 90^o. Какой многогранник является общей частью исходного октаэдра и двух октаэдров, полученных из него поворотами? Найдите его объём.

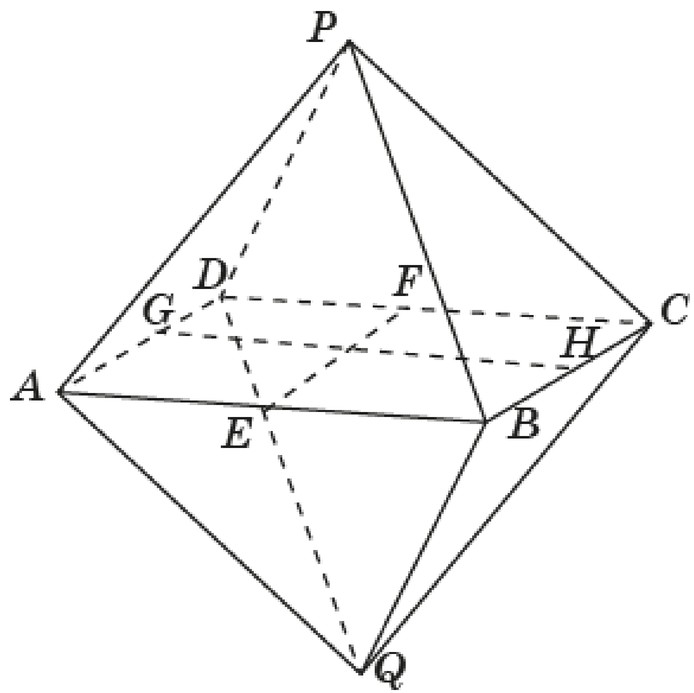
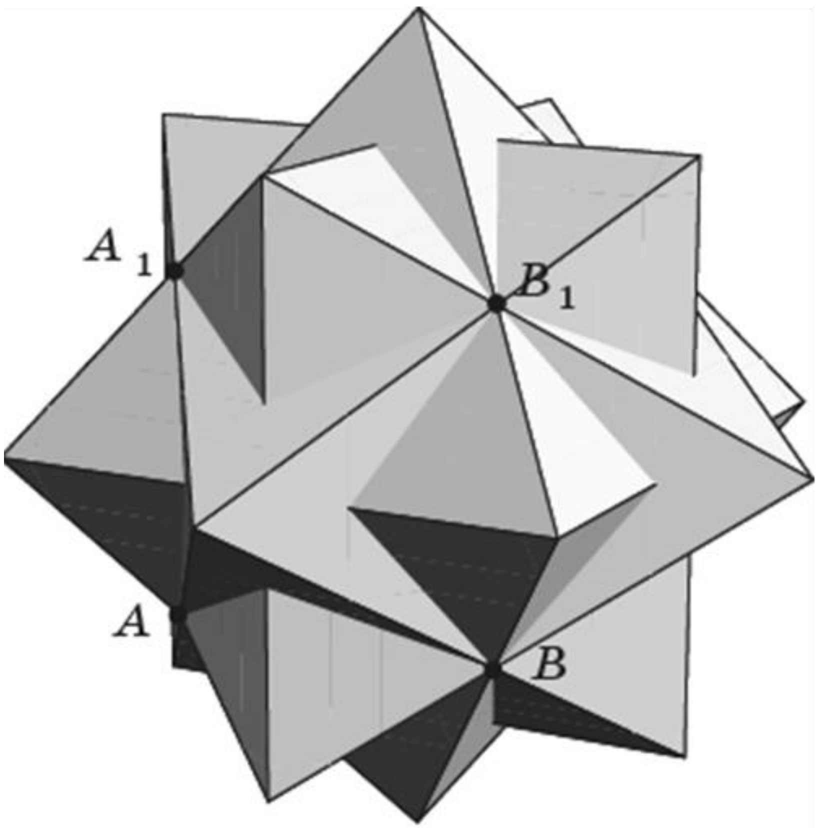
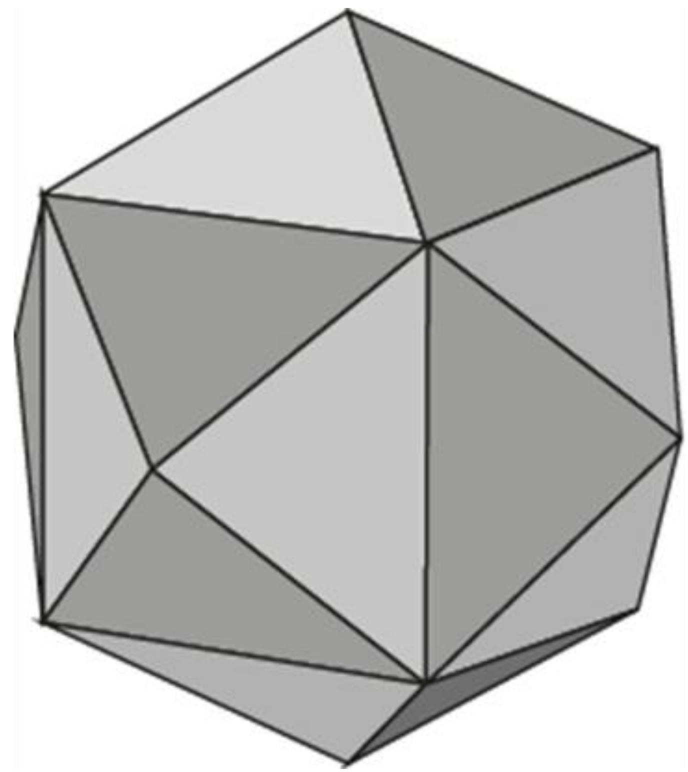


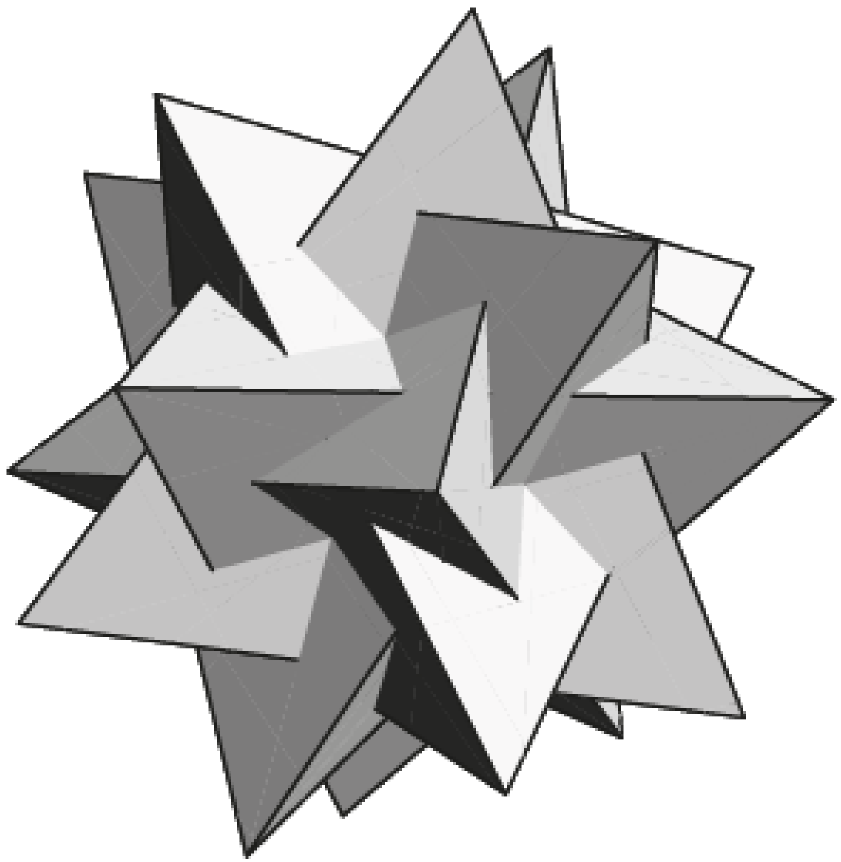
Рис. 69

Решение. Данный и повёрнутые октаэдры показаны на рисунке слева. Их общая часть (рис. справа) состоит из куба, рёбра которого равны $2 - \sqrt{2}$, и шести правильных четырёхугольных пирамид, основаниями которых служат грани этого куба, а высоты равны $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Непосредственные вычисления показывают, что объём этого многогранника равен $6 - 4\sqrt{2}$.

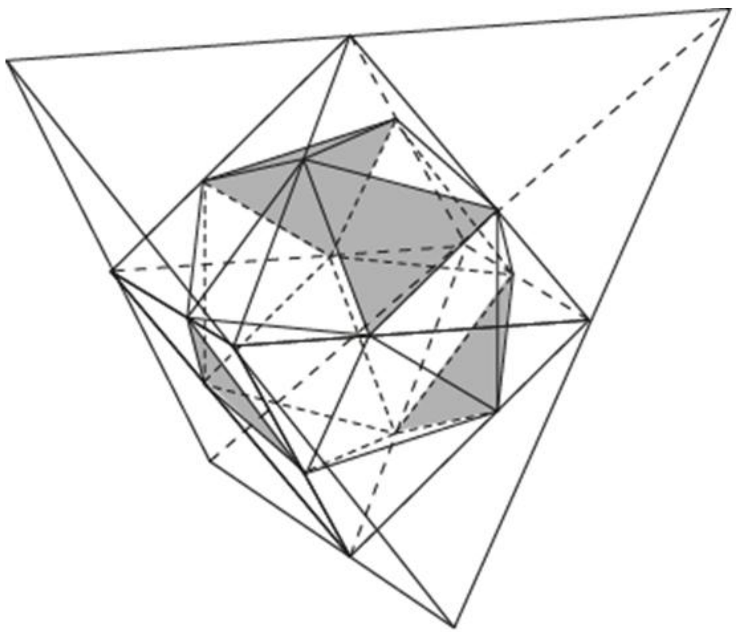




(D) На рисунке вершины тетраэдров расположены в вершинах додекаэдра. Сколько этих тетраэдров? Что является их общей частью? Найдите её объём, если объёмы тетраэдров равны 1.



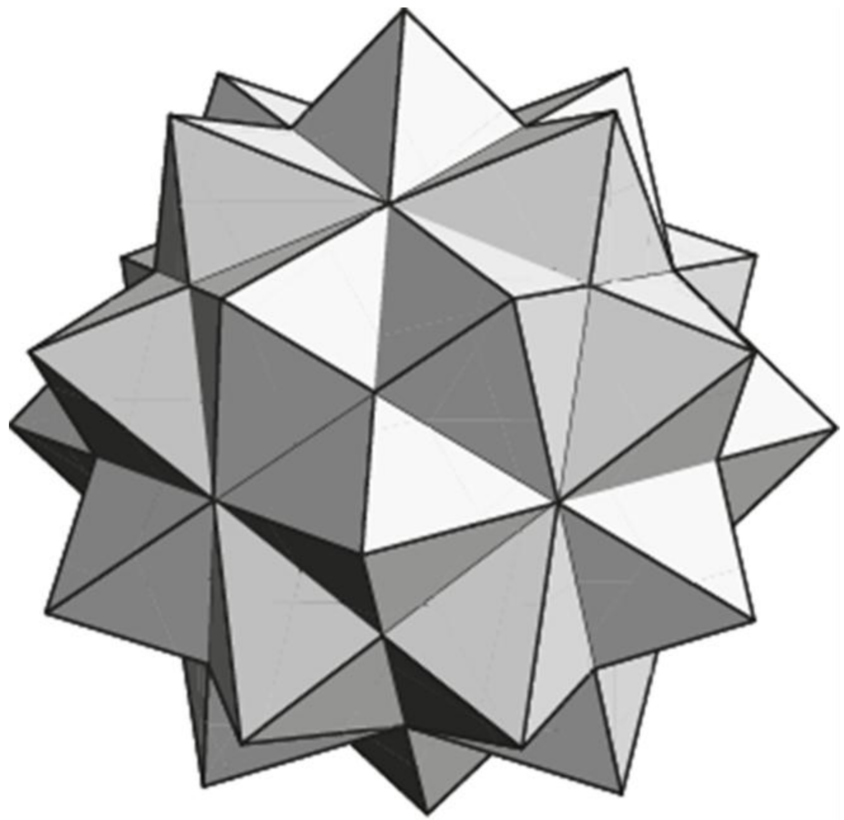
Решение. У додекаэдра имеется 20 вершин, у тетраэдра – 4 вершины. Следовательно, имеется 5 тетраэдров. Рассмотрим один из них. Впишем в него октаэдр, а в него – икосаэдр, как показано на рисунке.



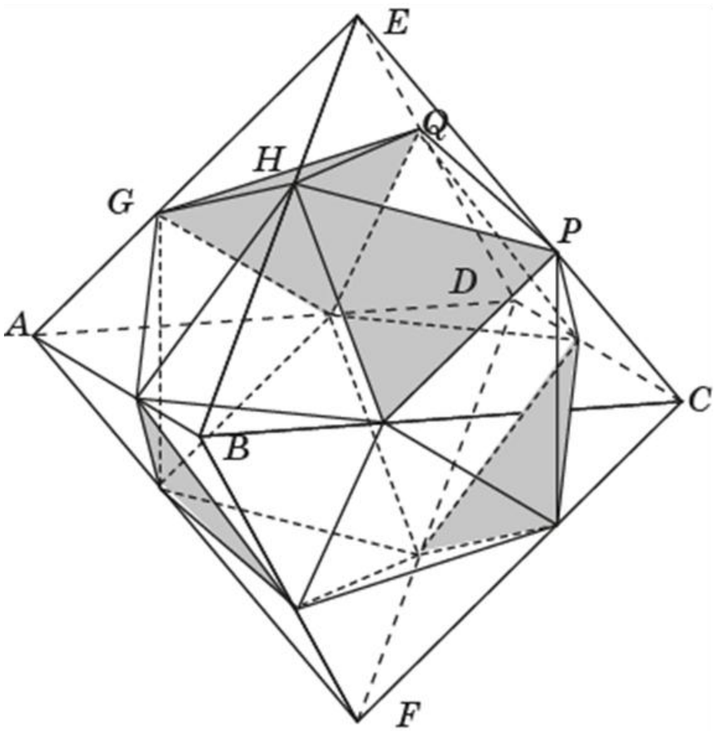
Четыре грани этого икосаэдра будут лежать на гранях тетраэдра. То же самое верно и для других тетраэдров. Таким образом, этот икосаэдр будет содержаться в каждом из пяти данных тетраэдров, следовательно, будет являться их общей частью.

Если объём тетраэдра равен 1, то объём октаэдра, вписанного в этот тетраэдр, равен $\frac{1}{2}$. Учитывая, что вершины икосаэдра делят рёбра октаэдра в золотом отношении, получаем, что объём икосаэдра равен $\frac{35-15\sqrt{5}}{4}$.

(D) Вершины октаэдров, изображённых на рисунке, являются серединами рёбер икосаэдра. Сколько этих октаэдров? Какой многогранник является их общей частью? Найдите его объём, если объёмы октаэдров равны 1.



Решение. У икосаэдра имеется 30 рёбер, у октаэдра – 6 вершин. Следовательно, имеется 5 октаэдров. Рассмотрим один из них. Впишем в него икосаэдр, как показано на рисунке.



Восемь граней этого икосаэдра будут лежать на гранях октаэдра. То же самое верно и для других октаэдров. Таким образом, этот икосаэдр будет содержаться в каждом из пяти данных октаэдров, следовательно, будет являться их общей частью.

Из решения предыдущей задачи мы знаем, что объём тетраэдра в два раза больше объёма октаэдра, вершинами которого являются середины рёбер этого тетраэдра.

Следовательно, искомый объём икосаэдра в два раза больше объёма икосаэдра из предыдущей задачи, т. е. равен $\frac{35-15\sqrt{5}}{2}$.

Контактная информация

Издательство «Мнемозина»:
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, д. 29 Б
Тел.: 8 (499) 367–67–81
E-mail: ioc@mnemozina.ru
Сайт: mnemozina.ru

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:
E-mail: td@mnemozina.ru
Тел.: 8 (495) 644–20–26

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте
«Школа в кармане»: pocketschool.ru